Министерство образования и науки Пермского края
государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Пермский химико-технологический техникум»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

для специальности 27.02.02 Техническое регулирование и управление качеством.
по дисциплине ЕН.01 «Математика»

2019

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Место дисциплины в ОПОП. Учебная дисциплина ЕН.01 Математика входит в математический и общий естественнонаучный цикл по специальности: 27.02.02 Техническое регулирование и управление качеством.

В результате изучения учебной дисциплины обучающийся должен уметь:

1. применять математические методы для решения профессиональных задач;
2. использовать приемы и методы математического синтеза и анализа в различных профессиональных ситуациях.

В результате изучения учебной дисциплины обучающийся должен знать:

1. основные понятия и методы математического синтеза и анализа, дискретной математики, теории вероятностей и математической статистики;
2. численные методы решения прикладных задач.

Обучающийся должен обладать **общими компетенциями,** включающими в себя способность:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, клиентами.

ОК 7. Брать ответственность за работу членов команды (подчиненных), за результат выполнения заданий.

ОК 8. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

ОК 9. Выполнять правила техники безопасности и требования по охране труда.

Обучающийся должен обладать **профессиональными компетенциями,** соответствующими основным видам профессиональной деятельности:

ПК 1.1. Осуществлять контроль качества и испытания продукции,
работ, услуг.

ПК 1.2. Выполнять статистический приемочный контроль.

ПК 1.3. Анализировать и обобщать результаты контроля качества и испытаний.

ПК 2.3. Определять порядок работ по подтверждению соответствия продукции, процессов, услуг, систем управления и аккредитации и принимать участие в них.

ПК 2.4. Принимать участие в работах по аккредитации испытательных и калибровочных лабораторий.

ПК 3.3. Проводить статистическое регулирование технологических процессов.

Назначение методических указаний. Методические указания предназначены для проведения практических занятий по учебной дисциплине ЕН.01 Математика, закрепления теоретических знаний.

В соответствии с чем разработаны методические указания. Методические указания разработаны в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины ЕН.01 «Математика» по специальности 27.02.02 Техническое регулирование и управление качеством.

Содержание методических указаний по выполнению практических работ соответствует требованиям Федерального государственного стандарта среднего профессионального образования по специальности 27.02.02 Техническое регулирование и управление качеством.

По учебному плану, и в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины ЕН.01 Математика, на изучение обучающимися предусмотрено 75 часов, из них практических – 40.

Методические указания включают 10 практических работ по теме «Математический анализ», 4 практических работы по теме «Линейная алгебра», 3 практических работы по теме «Дискретная математика», 3 практических работы по теме «Теория вероятности и математическая статистика». Каждая практическая работа содержит сведения о теме, цели ее проведения, включает пояснения к работе, содержание отчета, контрольные задания или вопросы, список литературы.

К выполнению практических работ обучаемые приступают после подробного изучения соответствующего теоретического материала.

Характер практических работ репродуктивный и частично-репродуктивный.

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

После окончания занятий обучающиеся приводят в порядок рабочее место, сдают преподавателю тетрадь для практических работ с полученными результатами.

ОПИСАНИЕ РАБОЧЕГО МЕСТА ОБУЧАЮЩЕГОСЯ

Реализация практических работ требует наличия учебного кабинета Математики.

Оборудование учебного кабинета:

– посадочные места по количеству обучающихся;

– рабочее место преподавателя;

– модели объемных геометрических фигур.

Каждый студент должен иметь при себе:

- лекционный материал по пройденному материалу;
- тетрадь для практических работ.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

Практическая работа № 1

Тема: Вычисление пределов с неопределенностями
Цель: Формирование умений вычислять пределы с неопределенностями.
Пояснения к работе:

Основные теоремы о пределах

$\lim(x+y)=\lim x+\lim y;(1)$

$\lim(x-y)=\lim x-\lim y;(1^*)$, то из условий(1) и (1*) $\Rightarrow$ $\lim(x\pm y)=\lim x\pm\lim y;$

$\lim(xy)=\lim x\lim y;(2)$ $\quad$ $\lim(x^m)=(\lim x)^m$ (3) $\quad$ $\lim\sqrt[m]{x}=\sqrt[m]{\lim x},$ (4)

$\lim\frac{x}{y}=\frac{\lim x}{\lim y}$, если $\lim y\neq 0$ (5) $\quad$ $\lim(\log_a x)=\log_a(\lim x)$ (6)

Запомните, что

$\lim\frac{\sin x}{x}=1$, при $x\to 0$ (Первый замечательный предел)

$\lim(1+\frac{1}{n})^n=e$, при $n\to\infty$ - число e; $e\approx 2{,}71828$ — основание натуральных логарифмов; (логарифм числа ***x*** по основанию ***e*** называется натуральным логарифмом и обозначается ***ln x.***

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e;\quad \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$ (второй замечательный предел)

При $x\to\infty$; или при $\alpha\to 0$.

<u>Вычисление пределов и раскрытие неопределенностей вида</u> $\left[\frac{0}{0}\right],\left[\frac{\infty}{\infty}\right],[1^\infty]$.

$$1.\ \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$$

$$2.\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg\,5x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cos 5x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)3x5x\cos(5x)}{3x\sin(5x)5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cos 5x}{5x}=\frac{3}{5}$$

$$3.\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{5x^2+2x}\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x^2}}{5+\frac{2}{x}}=\frac{3}{5}$$

$$4.\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+5x}{x+10}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{10}{x^3}}=\frac{1}{0}=\infty$$

$$5.\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+6}{x^4+10}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x^4}}{1+\frac{10}{x^4}}=\frac{0}{1}=0$$

$$6.\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+5}\right)^{2x+1}=(1^\infty)=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+5}\right)^{x+5}\right]^{\frac{2x+1}{x+5}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{2x+1}{x+5}}=e^2$$

Задание:

1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{x^2-25}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$

2. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x-7}{\left(x^2-49\right)}$

3. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{1}{x+5}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg\,5x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 5x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{x}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-1}{5x^2+2x}\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+3x^2-8}{5x^3-7x+3}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5x}{x+10}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+15}{x^4+7}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6}{x^4+10}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-5x^4+9}{4x^5+2x^3-7}$

13 . $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+5}\right)^{2n}=(1^{\infty})$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{4}{n}\right)^{n}\right]^2$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+5}\right)^x$

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+9}{x}\right)^x$

Практическая работа № 2

Тема: Вычисление пределов функций (1 и 2 замечательный предел)

Цель: формирование умений вычислять пределы функций.

Пояснения к работе:

Основные теоремы о пределах

$\lim(x+y)=\lim x+\lim y;$ (1)

$\lim(x-y)=\lim x-\lim y;$ (1*), то из условий(1) и (1*) $\Rightarrow$ $\lim(x\pm y)=\lim x\pm\lim y;$

$\lim(xy)=\lim x\lim y;$ (2) $\lim (x^m) = (\lim x)^m$ (3) $\lim\sqrt[m]{x}=\sqrt[m]{\lim x},$ (4)

$\lim\frac{x}{y}=\frac{\lim x}{\lim y}$, если $\lim y\neq 0$ (5) $\lim(\log_a x)=\log_a(\lim x)$ (6)

Запомните, что

$\lim\frac{\sin x}{x}=1$, при $x\to 0$ (Первый замечательный предел)

$\lim\ (1+\frac{1}{n})^n = e$, при $n\to\infty$ - число e; $e\approx 2{,}71828$ — основание натуральных логарифмов; (логарифм числа ***x*** по основанию ***e*** называется натуральным логарифмом и обозначается ***ln x.***

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e;\quad \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$ (второй замечательный предел)

При $x\to\infty$; или при $\alpha\to 0$.

Пример 1. Найти $\lim(x^4-3x^2+16x+1)$, при $x\to -1$

Решение. $\lim(x^4-3x^2+16x+1)=(\lim x^4-\lim 3x^2+16x+1)=[(\lim x)^4-3(\lim x)^2+16\lim x+1]=$

$=(-1)^4-3(-1)^2+16(-1)+1=-17$ *Ответ.* - 17.

Примечание. Для нахождения предела целого или дробного рационального алгебраического выражения, если предел знаменателя не равен нулю, надо переменную x заменить ее пределом и произвести указанные в выражении действия. Например,

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-x-5}{x^3+x+1}=\frac{2*2^2-2-5}{2^3+2+1}=\frac{1}{11}$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^3+2x^2}{5x^3-3x^2}$

Решение. Применить теорему о пределе дроби (частного) нельзя, т.к. при $x\to 0$ $\lim(5x^3-3x^2)=0$

До перехода к пределу следует упростить данную дробь:

$$\frac{2x^3+2x^2}{5x^3-3x^2}=\frac{2x^2(x+1)}{x^2(5x-3)}=\frac{2(x+1)}{5x-3}$$

Предел знаменателя

$$\lim_{x\to 0}(5x-3)=\lim_{x\to 0}(5x)-3=0-3=-3 \qquad -3\neq 0$$

Применяя теперь теорему о пределе дроби (частного), получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+2x^2}{5x^3-3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2(x+1)}{x^2(5x-3)}=\lim_{x\to 0}\frac{2(x+1)}{5x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}2(x+1)}{\lim\limits_{x\to 0}5x-3}=\frac{2\lim\limits_{x\to 0}(x+1)}{5\lim\limits_{x\to 0}(x-3)}=-\frac{2}{3}$$

Ответ. -2/3

Пример 3: Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{3x+1}$

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{3x+1}=\dfrac{5}{\lim\limits_{x\to\infty}3x+1}=\dfrac{5}{3\lim\limits_{x\to\infty}x+1}=\dfrac{5}{\infty}=0$ *Ответ.* 0.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{2x^3+1}$

Решение. Числитель и знаменатель дроби превращаются в бесконечность, а их отношение не имеет смысла. Поэтому преобразуем дробь, разделив числитель и знаменатель дроби на наивысшую степень аргумента, т.е. на x^3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{2x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x^3})}{\lim\limits_{x\to\infty}(2+\frac{1}{x^3})}=\frac{1}{2}$$ *Ответ.* 1/2.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$

Решение. Применить теорему о пределе дроби нельзя, т.к. предел знаменателя равен нулю.

Перепишем данное выражение так:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin 4x}{4x}=4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}$, Применяя формулу $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, получим:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}=4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}=4*1=4$ *Ответ.* 4.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x^2-x-20}$

Решение. применить теорему о пределе частного нельзя, т.. при x=5 числитель и знаменатель обращаются в нуль. Перепишем данную дробь в виде

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x^2-x-20}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{(x+4)(x-5)}-\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{(x+4)(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}=\frac{x-5}{(x+4)(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})},$$

Переходя к пределу, получим:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x^2-x-20}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{(x+4)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}=\frac{1}{18\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{90}$$

Либо : $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x^2-x-20}=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{(x+4)(x-5)}=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{(x+4)(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})}=\dfrac{1}{(x+4)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}$.

Ответ. $\dfrac{\sqrt{5}}{90}$

Задание:

1. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x-5}{x^2-25}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$ 2. $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{x-7}{(x^2-49)}$ 3. $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{1}{x+5}$

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{tg\,5x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$ 5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{\sin 5x}$ 6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 8x}{x}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-1}{5x^2+2x}\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+3x^2-8}{5x^3-7x+3}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5x}{x+10}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ 10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+15}{x^4+7}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6}{x^4+10}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ 12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-5x^4+9}{4x^5+2x^3-7}$

13 . $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+5}\right)^{2n}=(1^\infty)$ 14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{4}{n}\right)^n\right]^2$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+5}\right)^x$ 16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+9}{x}\right)^x$

Практическая работа № 3

Тема: Приложение теории пределов к решению прикладных задач.

Цель: формирование умения применять теорию пределов к решению прикладных задач.

Пояснения к работе:

Основные теоремы о пределах

$\lim(x+y)=\lim x+\lim y;\ (1)$

$\lim(x-y)=\lim x-\lim y;\ (1^*)$, то из условий(1) и (1*) $\Rightarrow$ $\lim(x\pm y)=\lim x\pm\lim y;$

$\lim(xy)=\lim x\lim y;\ (2)$ $\quad\lim(x^m) = (\lim x)^m$ (3) $\quad\lim\sqrt[m]{x}=\sqrt[m]{\lim x},$ (4)

$\lim\dfrac{x}{y}=\dfrac{\lim x}{\lim y}$, если $\lim y\neq 0$ (5) $\quad\lim(\log_a x) = \log_a(\lim x)$ (6)

Запомните, что

$\lim\dfrac{\sin x}{x}=1$, при $x\to 0$ (Первый замечательный предел)

$\lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$, при $n\to\infty$ - число e; $e\approx 2{,}71828$ — основание натуральных логарифмов; (логарифм числа ***x*** по основанию ***e*** называется натуральным логарифмом и обозначается ***ln x.***

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e;\quad \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$ (второй замечательный предел)

При $x\to\infty$; или при $\alpha\to 0$.

2. Рассмотрите решение следующих примеров:

Пример 1. Найти $\lim(x^4-3x^2+16x+1)$, при $x\to -1$

Решение. $\lim(x^4-3x^2+16x+1) = (\lim x^4 - \lim 3x^2 + 16x + 1) = [(\lim x)^4 - 3(\lim x)^2 + 16\lim x + 1] =$

$=(-1)^4-3(-1)^2+16(-1)+1=-17$ *Ответ.* - 17.

Примечание. Для нахождения предела целого или дробного рационального алгебраического выражения, если предел знаменателя не равен нулю, надо переменную x заменить ее пределом и произвести указанные в выражении действия. Например,

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-x-5}{x^3+x+1}=\frac{2*2^2-2-5}{2^3+2+1}=\frac{1}{11}$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3+2x^2}{5x^3-3x^2}$

Решение. Применить теорему о пределе дроби (частного) нельзя, т.к. при $x\to 0$

$\lim(5x^3-3x^2)=0$

До перехода к пределу следует упростить данную дробь:

$$\frac{2x^3+2x^2}{5x^3-3x^2}=\frac{2x^2(x+1)}{x^2(5x-3)}=\frac{2(x+1)}{5x-3}$$

Предел знаменателя

$$\lim_{x\to 0}(5x-3)=\lim_{x\to 0}(5x)-3=0-3=-3 \qquad -3\neq 0$$

Применяя теперь теорему о пределе дроби (частного), получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+2x^2}{5x^3-3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2(x+1)}{x^2(5x-3)}=\lim_{x\to 0}\frac{2(x+1)}{5x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}2(x+1)}{\lim\limits_{x\to 0}5x-3}=\frac{2\lim\limits_{x\to 0}(x+1)}{5\lim\limits_{x\to 0}(x-3)}=-\frac{2}{3}$$

Ответ. -2/3

Пример 3: Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{3x+1}$

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{3x+1}=\frac{5}{\lim\limits_{x\to\infty}3x+1}=\frac{5}{3\lim\limits_{x\to\infty}x+1}=\frac{5}{\infty}=0$ *Ответ.* 0.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{2x^3+1}$

Решение. Числитель и знаменатель дроби превращаются в бесконечность, а их отношение не имеет смысла. Поэтому преобразуем дробь, разделив числитель и знаменатель дроби на наивысшую степень аргумента, т.е. на x^3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{2x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x^3})}{\lim\limits_{x\to\infty}(2+\frac{1}{x^3})}=\frac{1}{2}$$ *Ответ.* 1/2.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}$

Решение. Применить теорему о пределе дроби нельзя, т.к. предел знаменателя равен нулю.

Перепишем данное выражение так:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{4x}=4\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}$, Применяя формулу $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, получим:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=4\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=4*1=4$ *Ответ.* 4.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x^2-x-20}$

Решение. применить теорему о пределе частного нельзя, т.. при x=5 числитель и знаменатель обращаются в нуль. Перепишем данную дробь в виде

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x^2-x-20}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{(x+4)(x-5)}-\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{(x+4)(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}=\frac{x-5}{(x+4)(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})},$$

Переходя к пределу, получим:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x^2-x-20}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{(x+4)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}=\frac{1}{18\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{90}$$

Либо: $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x^2-x-20}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{(x+4)(x-5)}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{(x+4)(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})}=\frac{1}{(x+4)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}.$

Ответ. $\frac{\sqrt{5}}{90}$

Задание:

1.При параллельном соединении двух проводников, имеющих сопротивления r и r' , общее сопротивление R, соответствующей части электрической цепи, вычисляется по формуле

$\frac{1}{R}=\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}.$ Считая r известным, найти $\lim\limits_{r'\to\infty}R;$ $\lim\limits_{r'\to 0}R.$

Истолкуйте полученные результаты с точки зрения физики.

2.Формула выпуклой линзы имеет вид:

$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$, d , f – Расстояния соответственно предмета и

его изображения. – фокусное расстояние линзы (const); найти $\lim_{d\to\infty} f$; $\lim_{d\to F} f$.(1) $d < F$; 2) $d > F$) ; полученные результаты объяснить с точки зрения физики.

3. Масса движущегося тела определяется соотношением $m(\beta) = \frac{m_o}{\sqrt{1-\beta^2}}$ и $\beta = \frac{v}{c}$ - отношение скорости тела к скорости света. Покажите, что в предельном переходе при $\beta \to 0$ массу можно считать постоянной и равной m_o

4. Интервал времени между двумя событиями зависит от скорости движения системы, где эти события происходят, следующим образом:

$\Delta t(v) = \frac{\Delta t_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$; При $v \to c$ найдите предел функции $\Delta t(v)$ и сделайте вывод, считая, например, что Δto - продолжение жизни близнеца, оставшегося на Земле, а Δt - продолжительность жизни его брата, отправившегося в космическое путешествие.

5.Значение кинетической энергии тела выражается формулой

$$E_{kuh}(\beta) = \frac{m_o v^2}{1+\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$ Найдите предел этой функции,

т.е. получите классическую формулу для кинетической энергии, если $\beta \to 0$.

6.Сила давления летчика, совершающего «мертвую петлю», на сиденье в момент достижения верхней точки «мертвой петли» выражается формулой $\varphi = m(a - g)$, где $a = v^2/r$ - центростремительное (нормальное) ускорение , r- радиус петли. Рассматривая данные выражения как функцию центростремительного ускорения, докажите, что при предельном переходе $a \to g$ летчик испытывает состояние невесомости.

7.Сила давления летчика на сиденье в нижней точке «мертвой петли» определяется формулой $Q=m(g + v^2/r)$, m- масса летчика, $g = 9{,}8$ м/с^2.

Рассматривая данное выражение как функцию от ***r*** , найдите ее предел при: а**)** **r→∞;** b**) r →0.** Сделайте соответствующие выводы.

8.В падающем с ускорением ***a*** лифте тело давит на пол кабины с силой P= m(a – g), g - ускорение свободного падения. Рассматривая данный процесс как функцию от a, найдите ее предел при a) **a→g**; b**) a→ 0**.

Практическая работа № 4
Тема: Производная сложной функции.
Цель: формирование умения находить производную сложной функции.
Пояснения к работе:

1. Производная показательной функции.

Изучая логарифмическую функцию $y=\log_a x$, мы рассматривали функцию $y=\ln x$ – натуральный логарифм, т.е. логарифм по основанию е, где е примерно 2,71.

$$\mathrm{Log}_e x = \ln x.$$

Теорема 1. Функция e^x дифференцируема в каждой точке области определения и

$$(e^x)' = e^x.$$

Теорема 2. Показательная функция a^x дифференцируема в каждой точке области определения и

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a.$$

Пример .

А) $f(x)=e^x+4\cdot 2^x$.

$f(x)' = (e^x)'+4\cdot(2^x)' = e^x+4\cdot 2^x\cdot\ln 2 = e^x + 2^2\cdot 2^x\cdot \ln 2 = e^x + 2^{2+x}\cdot \ln 2.$

Б) $f(x)= x^4\cdot 4^x$.

$f(x)' =(x^4\cdot 4^x)' = (x^4)'\cdot 4^x+ x^4\cdot(4^x)' = 4x^3\cdot 4^x + x^4\cdot 4^x\cdot\ln 4 = 4^x\cdot x^3(4 + x\cdot \ln 4).$

В) $f(x)=\dfrac{5^x}{2^x+1}$

$f(x)' = \dfrac{\left(5^x\right)' \cdot \left(2^x+1\right) - \left(2^x+1\right)' \cdot 5^x}{\left(2^x+1\right)^2} = \dfrac{5^x \cdot \ln 5 \cdot \left(2^x+1\right) - 2^x \cdot \ln 2 \cdot 5^x}{\left(2^x+1\right)^2} =$

$= \dfrac{2^x \cdot 5^x \cdot \ln 5 + 5^x \cdot \ln 5 - 2^x \cdot 5^x \cdot \ln 2}{\left(2^x+1\right)^2} = \dfrac{10^x \cdot \left(\ln 5 - \ln 2\right) + 5^x \cdot \ln 5}{\left(2^x+1\right)^2}$

$f(x)' = \dfrac{10^x \cdot \ln 2{,}5 + 5^x \cdot \ln 5}{\left(2^x+1\right)^2}$.

3.

1. Производная логарифмической функции.

1. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
2. $(\log_a x)' = \dfrac{\ln x}{\ln a} = \dfrac{1}{\ln a} \cdot \left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{\ln a} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$.

$$\mathbf{(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}}.$$

3.

1. Сложная функция.

Пусть заданы две функции y=g(x) и z=φ(y), причём область определения функции φ содержит множество значений функции g. Функция z, заданная формулой z= φ(g(x)), называется сложной функцией, составленной из g и φ. Иными словами сложная функция это функция от функции.

Примеры .

1. f(x)=$\sqrt{x^3+4x-5}$.

f= $\sqrt{g}$; g=x^3+4x+5.

2. f(x)=2$\log_5$(3x-1)

f = 2 $\log_5$ g g = 3x-1.

3. f(x)=$(5x+9)^{100}$

f = g^{100} g = 5x+9.

3.

1. Производная сложной функции.

Если z= f(g(x)), то

$$\mathbf{z' = f'(\,g)\cdot g'(x).}$$

Пример 1.

1.f(x)=$\sqrt{x^3+4x-5}$.

g=x^3+4x+5

f(x)′=$\left(\sqrt{g}\right)'\cdot g' = \left(g^{\frac{1}{2}}\right)$ ·g′=

$= \left(\frac{1}{2}\cdot g^{\frac{-1}{2}}\right)\cdot g' = \frac{1}{2\sqrt{g}}\cdot g' = \frac{1}{2\sqrt{x^3+4x+5}}\cdot\left(x^3+4x+5\right)' = \frac{3x^2+4}{2\sqrt{x^3+4x+5}}$.

2.f(x)=2$\log_5$(3x-1),

g = 3x-1.

f(x)′ =(2 $\log_5$ g)′ ·g′ = 2· ($\log_5$ g)′ ·g′ $2\cdot\frac{1}{g\cdot\ln 5}\cdot g' = \frac{2}{(3x-1)\cdot\ln 5}\cdot(3x-1)' = \frac{6}{(3x-1)\cdot\ln 5}$.

f(x)′ = $\frac{6}{(3x-1)\cdot\ln 5}$.

3. 3. f(x)=$(5x+9)^{100}$

g = 5x+9.

$f(x)' = (g^{100})' \cdot g' = 100g^{99} \cdot g' = 100 \cdot (3x-1)^{99} \cdot (3x-1)' = 100 \cdot (3x-1)^{99} \cdot 3 = 300 \cdot (3x-1)^{99}$.

$f(x)' = 300 \cdot (3x-1)^{99}$.

5.2 Производная степенной функции.

Формула вычисления производной степенной функции x^{α}, где α – любое действительное число, такова –

$$\mathbf{(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.}$$

Покажем правильность этой формулы на примерах.

1. Было показано, что $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$ (смотри занятие 1).

2. Покажем, что $(x^4)' = 4x^3$

Доказательство: $(x^4)' = (x^2 \cdot x^2)' = (x^2)' \cdot x^2 + x^2 \cdot (x^2)' = 2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x = 2x^3 + 2x^3 = 4x^3$.

$$(x^4)' = 4x^3.$$

Аналогично можно показать, что $(x^5)' = 5x^4$, $(x^6)' = 6x^5$ и так далее.

Если $\alpha = 0$, то $x^{\alpha} = x^0 = 0 \cdot x^{0-1} = 0$

$\alpha = 1$, то $x^{\alpha} = x^1 = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$.

Выпишем все формулы:

$(x^1)' = 1$

$(x^2)' = 2x$,

$(x^3)' = 3x^2$,

$(x^4)' = 4x^3$,

- - - - - - - -

$(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

Пример:

А) $f(x) = 3x^5 + x^4 + 3x^2 + 1$

$f(x)' = (3x^5 + x^4 + 3x^2 + 1)' = (3x^5)' + (x^4)' + (3x^2)' + (1)' = 3(x^5)' + (x^4)' +$

$+ 3(x^2)' + (1)' = 3 \cdot 5x^4 + 4x^3 + 3 \cdot 2x + 0 = 15x^4 + 4x^3 + 6x$.

Б) $f(x) = 3x^7 - \frac{5}{x^3}$

$f(x)' = (3x^7 - 5x^{-3})' = (3x^7)' - (5x^{-3})' = 3 \cdot (7x^6) - 5 \cdot (-3x^{-2}) = 21x^6 + 15x^{-2} = = = 21x^6 + \frac{15}{x^2}$.

В) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 5x^2 - 10$,

$f(x)' = (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 5x^2 - 10)' = (\sqrt{x})' + (\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})' + (5x^2)' - (10)' =$

$= (x^{\frac{1}{2}})' + \left(x^{\frac{-2}{3}}\right)' + (5x^2)' - (10)' = \frac{1}{2} \bullet x^{\frac{-1}{2}} + \left(-\frac{2}{3} \bullet x^{\frac{-5}{3}}\right) + 5 \cdot x^2 - 0 =$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} + 10x = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}} + 10x$.

Дидактический материал к занятию.

Задание 1. Вычислить производные функций:

$f(x) = x^2 + x^3$;

$f(x) = \frac{1}{x} + 5x - 2$;

$f(x) = x^2+3x-1$;

$f(x) = x^3 + \sqrt{x}$;

$f(x)=x^3\cdot(4+2x-x^2)$;

$f(x)=x^2\cdot(3x+x^3)$;

Задание1: Найдите производные функций:

1. $f(x)= 1- \frac{1}{2}$ Sinx; 2. f(x)=0,5+1,5 Cosx;

3. f(x) = x+ 2 tgx ; 4. f(x)=2 Sinx+15 Cosx;

Задание 4. Задайте формулой три какие-нибудь функции, производная которых равна:

а) 2x+3;

б) 8x – 2;

в) $16x^3$- 0,4;

г) $9x^2- \frac{1}{2}$.

Задание 1. Вычислить производные следующих сложных функций.

1. $f(x)=e^{3x,}$
2. $f(x)=5^{4x}$,
3. $f(x)=3 \log_3 5x$,
4. $f(x)=6\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$,
5. $f(x)=3tg7x$,
6. $f(x)=4\cos\left(x^2-1\right)$,
7. $f(x)= \log_3 5x$,
8. f(x)=ln4x,
9. f(x)=ln(x-1),

10. f(x)=6ln(3x+1),

11. f(x)=$\sqrt{x^2+3x+9}$,

12. f(x)=$\ln(3x^2+x-3)$?

13. f(x)= $(23+15x^2+x^3)^4$,

14. f(x)=$4\cos^5 3x$,

15. f(x)= $8\sin^4 10x$,

16. f(x)=$\sqrt{(x+3)^4+4x}$,

17. f(x)= lnsinx .

Практическая работа № 5
Тема: Дифференцирование функций.
Цель: формирование умения дифференцировать функции.
Пояснения к работе:

5.1 Производная произведения.

Правило2. Если функции U и V дифференцируемы в точке x_0, то и их произведение дифференцируемо в этой точке, и

$$(U\times V)' = U'\times V+U\times V'.$$

Следствие 1. Если функция U дифференцируема в точке x_0, а C – постоянная, то функция CU дифференцируема в точке x_0 и

$$(CU)' = CU'$$

Коротко говоря : постоянный множитель можно вынести за знак производной.

Доказательство:

$(C\,U)' = C'\,U + C\,U' = 0\,U + C\,U' = CU'$

$(CU)' = CU'$

Следствие 2. Если функции U и V дифференцируемы в точке x_0, то функция (U – V) дифференцируема в этой точке, и

$$(U - V)' = U' - V',$$

то есть производная разности равна разности производных.

Доказательство:

$(U - V)' = (U + (-V))' = U' + ((-1)\cdot V)' = U' + (-1)\cdot V' = U' - V',$

$$(U - V)' = U' - V'.$$

5.1 Производная частного.

Правило 3. Если функции U и V дифференцируемы в точке x_0, и функция V не равна нулю в этой точке, то частное $\frac{U}{V}$ также дифференцируемо в этой точке и

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}.$$

Вычислите производные функций.

1) $f(x) = (x^3 - 4x + 1)^3$

Здесь две функции: $y = x^3 - 4x + 1$ и $z = y^3$.

Найдем производную: $x^3 - 4x + 1 = t$

Тогда

f ′(x)=$(t^3)' \cdot t' = 3t^2 \cdot t' = 3t^2 \cdot (x^3 - 4x + 1)' = 3t^2 \cdot (3x^2 - 4) = 3(x^3 - 4x + 1)^2 \cdot (3x^4 - 4)$.

2) $f(x) = \cos^3\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(\cos\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)^3$.

$t = \cos\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

$f'(x) = (t^3)' \cdot t' = 3t^2 \cdot t' = 3t^2 \cdot \left(\cos\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)' =$

$x + \frac{1}{x} = u$

$= 3t^2 \cdot (\cos u)' \cdot u' = 3t^2 \cdot (-\sin u) \cdot u' = 3t^2 \cdot (-\sin u) \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)' = 3t^2 \cdot (-\sin u) \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) =$

$$= 3\cos^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = -3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\cos^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\sin\left(x+\frac{1}{x}\right).$$

3) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{x}{1+2x}}$.

$$y = \ln\sqrt{\frac{x}{1+2x}} = \ln\left(\frac{x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{x}{1+2x} = \frac{1}{2}(\ln x - \ln(1+2x)) = \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+2x)$$

$$y' = \frac{1}{2}(\ln x)' - \frac{1}{2}(\ln(1+2x))' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+2x}\cdot 2 = \frac{1}{2x} - \frac{1}{1+2x} = \frac{1+2x-2x}{2x\cdot(1+2x)} = \frac{1}{4x^2+2x}.$$

4) $f(x) = e^{\cos x}$.

t=cosx.

$$f'(x) = \left(e^t\right)'\cdot t' = e^t\cdot t' = e^t\cdot(\cos x)' = e^t\cdot(-\sin x) = e^{\cos x}\cdot(-\sin x) = -\sin x\cdot e^{\cos x}.$$

Задания:

1 вариант.

№1 Вычислите производные функций:

- $f(x) = tg^2 x + \sin^3 2x$,
- $f(x) = ctg\, 2x - 3\cos^4 3x$,
- $f(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$,
- $f(x) = \ln\frac{x^3}{1-x^2}$,
- $f(x) = 4^x \cdot x^4$.

№2 Найдите значение производной функции в точке x = 1, если

$f(x) = \sqrt{e^x}\cdot\ln x^2$.

Вариант 2.

№1. Вычислите производные функций:

- $f(x) = ctg4x - 3\sin^2 2x$,
- $f(x) = \ln\sin 4x$,
- $f(x) = \dfrac{5 - e^{2x}}{e^{2x} + 2}$,
- $f(x) = \ln\dfrac{3 - x}{1 + x^2}$,
- $f(x) = 17^{\frac{2}{x}}$.

№2. Найдите значение производной функции в точке x = 1, если

$f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{8 + x^2}}$.

Вариант 3.

№1. Вычислите производные функций:

- $f(x) = \sin^6 7x - \dfrac{1}{\cos^2 x}$,
- $f(x) = \sqrt{tg2x} + ctg^2 4x$,
- $f(x) = \sqrt[4]{(x^3 - 1)^3}$,
- $f(x) = \ln\dfrac{2 - x}{4 + x}$,
- $f(x) = 2^x + 2^{2x} + 2^{3x}$.

№2. Найдите значение производной функции в точке x = 0, если

$f(x) = \left(x^4 + 2\right) \cdot \sqrt{x^2 + 1}$.

Задание1: Найдите производные функций:

5. f(x)= $\frac{x}{\sin x}$, 6. f(x)= $\frac{x}{1+x} - \frac{\cos x}{x^3}$;

7. f(x)= $\frac{x^2}{\cos x - 1}$; 8. f(x)= $\frac{\left(4x^3 - 5x^4\right) \cdot \cos x}{tgx}$;

9 f(x)= $\frac{\cos x}{1 + tgx}$; 10. f(x)= (Cosx+ Sinx)· $\sqrt[7]{x^5}$.

f(x)= $\sqrt{x} \cdot (2x \ \ - x)$;

f(x)= (2x-3)(1-x^3);

f(x)=x^8+3x^4-x-5;

f(x)= $\frac{x}{3} - \frac{4}{x^2} + \sqrt[5]{x^3}$;

f(x)= x^7-4x^5+ $x\sqrt[7]{x^2}$ +x;

f(x)= $\frac{x^2}{2} + \frac{3}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}}$

Задание 2. Решите уравнение f′(x)= 0, если

f(x)=2x^2-x;

f(x)= $\frac{3}{x^3} - 1{,}5x \ \ - 4x$;

f(x)= $\frac{-2}{3} \cdot x^3 + x^2 + 12$;

f(x)=$2x - 5x^2$.

Задание 3.Вычислите f′(1), если

f(x)=$\left(\sqrt[3]{x} + x^2\right) \cdot \left(2 - \sqrt{x}\right)$;

f(x)=$\sqrt{x} \cdot \left(3x \;\; - x\right)$.

Практическая работа № 6
Тема: Исследование функций с помощью первой и второй производной.
Цель: формирование умения исследовать функции с помощью первой и второй производной.
Пояснения к работе:

Теорема 1. Функция f возрастает на интервале (а; в) тогда и только тогда, когда для любого x из (а;в) f ′ (x)>0.

Теорема 2. Функция f (x) убывает на интервале (а; b) тогда и только тогда, когда для любого x из (а; b) f ′ (x)<0.

Правило нахождения интервалов монотонности .

1. Находим производную f ′ (x), затем находим точки в которых f ′ (x)=0 или не существует. Эти точки называются критическими для функции f .
2. Критические точки разбивают область определения на интервалы, на каждом из которых производная f ′ (x) сохраняет свой знак. Эти интервалы будут интервалами монотонности.
3. Определяем знак f ′ (x) на каждом из найденных интервалов. Если f ′ (x)>0 на интервале, то на нем функция возрастает, если f ′ (x)<0 – убывает.

Пример : Найдите интервалы монотонности функции f (x) =x·lnx+3.

Решение. 1) Найдём f ′ (x)

f ′ (x)=$(x\ln x+3)'$ = $(x\ln x)'+3'=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+0=\ln x+1$.

2) Найдём точки в которых производная равна нулю.

Lnx+1=0 lnx = - 1 $x=\frac{1}{e}$.

f ′ (x)>0 на $\left(\frac{1}{e};+\infty\right)$ f ′ (x)<0 на $\left(0;\frac{1}{e}\right)$.

Значит функция возрастает на $\left(\frac{1}{e};+\infty\right)$ и убывает на $\left(0;\frac{1}{e}\right)$.

Исследование на экстремумы.

Определение 1.Точка x_0 называется точкой максимума, если в ней возрастание сменяется убыванием.

Точка x_0 называется точкой минимума , если в ней убывание сменяется возрастанием.

Определение 2. Точки максимума и минимума называются точками экстремума.

Теорема 3. Если точка x_0 является точкой максимума или минимума функции y = f (x), то $f'(x) = 0$ (если она существует в этой точке).

Теорема 4. Если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с плюса на минус, то x_0 является точкой максимума.

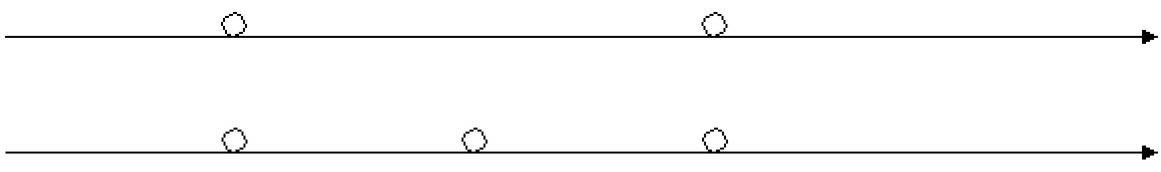
Если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с минуса на плюс, то точка x_0 является точкой минимума.

Правило нахождения экстремумов.

1. Найдите критические точки.
2. Исследуйте знак производной $f'(x)$ в окрестности каждой точки.

Пример. Найдите экстремумы функции $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5$.

Решение: $f'(x) = x^3 - 4x$, $x^3 - 4x = 0$, x=0 или x=2 или x = - 2 .



Ответ: $x_{min} = -2$, $x_{max} = 0$, $x_{min} = 2$.

Схема исследования функции.

1. Область определения и множество значений.
2. Исследование на четность, нечетность, периодичность.

А) четность – нечетность . Сначала нужно проверить симметрична ли область определения относительно нуля, если нет, то это функция общего вида, если да – проверяем выполнимость условий. f (-x) =f (x) (четная) или f (-x) = - f (x) (нечетная), иначе – общего вида.

Б) Периодичность . Ищем положительное число T, такое что:

f (x) = f (x+T) = f (x - T) – периодичная .

3. Нули функции (точки пересечения графика функции о осями)

а) ось y, точку находим из условия x = 0. (0; f (0))

б) ось x, точки пересечения находим из условия y = 0 .

4. Промежутки знакопостоянства. Промежутки знакопостоянства находим из условий f (x) >0 и f (x) <0, на тех промежутках, где f (x) >0, график функции будет выше оси x, там где f (x) <0, график функции будет ниже оси x.

5. Промежутки монотонности. Промежутки на которых f ′ (x)>0 – это промежутки возрастания функции, где f ′ (x)< 0 – промежутки убывания.

6. Экстремумы функции. Находим точки в которых производная равна нулю и определяем, какие из них точки минимума, а какие точки максимума.

7. Дополнительные точки. Строятся в том случае, если по найденным точкам трудно определить поведение графика.

Пример. Исследуйте функцию и постройте её график f (x) = $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5$.

Решение:

1.D_y=R; E_y = R.

2. D_y – симметрична относительно 0 , найдем f (-x) =

$\frac{1}{3}\cdot(-x)^3 - \frac{1}{5}\cdot(-x)^5 = -\frac{1}{3}\cdot x^3 + \frac{1}{5}x^5 = -\left(\frac{1}{3}\cdot x^3 - \frac{1}{5}\cdot x^5\right) = -f(x)$ - функция нечетная, значит график симметричен относительно начала координат.

3. Нули функции.

А) ось у: найдем f (0) = 0 (0;0)

Б) ось х: решим уравнение $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5$ =0,

$$x^3 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{5}\right) = 0$$

$x^3=0$, х = 0 или $\left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{5}\right) = 0$ х = $\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$.

4. Промежутки знакопостоянства .График выше осе х на $\left(-\infty;-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ и $\left(0;\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$; ниже оси х на $\left(-\sqrt{\frac{5}{3}};0\right)$ и $\left(\sqrt{\frac{5}{3}};+\infty\right)$.

5. Промежутки монотонности. $f'(x) = x^2 - x^4 = x(x+1)(1-x)$

$f'(x) = 0$ $x=0$, $x=1$, $x=-1$.

f ↑ на (-1; 1)

f ↓ на ($-\infty$; -1); $(1;+\infty)$.

6.$x_{max}=1$ $y_{max} = \frac{2}{15}$.

$X_{min}= -1$ $y_{min}= -\frac{2}{15}$.

7. Дополнительные точки. Х=3 у ≈ 40; х= -3 у ≈ -40

Дидактический материал.

1. Определите интервалы монотонности следующих функций.

а) f (x) = 5x – 2 ;

б) f (x) = 4 – 9x ;

в) f (x) = $\frac{1}{3x}$;

г) f (x) = $\frac{4}{5-x}$;

д) f (x) = x^2+x – 1 ;

е) f (x) = $(x+1)^3$;

ж) f (x) = $x \cdot (x^2-3)$;

з) f (x) = $3x^4-6x^2+4$;

и) f (x) = $7x^2$ +14x+1;

к) f (x) = $x^3 \cdot (1-x)$.

2. Найдите экстремумы следующих функций:

а) f (x) = 1+4x – x^2;

б) f (x) = 3+x^2 – 6x ;

в) f (x) = $\frac{1}{4}x^4-x^2+5$;

г) f (x) = $\frac{1}{3}x^3-x^4+5$.

Практическая работа № 7
Тема: Применение производной к решению прикладных задач.
Цель: формирование умения применять производную к решению прикладных задач.
Пояснения к работе:

Определение 7. Нормалью, проведённой к графику функции в точке M_0 , называется прямая , проходящая через эту точку перпендикулярно касательной.

2. Геометрический смысл производной

Углы α и β соответственные при параллельных прямых и секущей tgα из треугольника M_0MN равен tg α = $\frac{MN}{M_0N}$, $MN=f(x) – f(x_0) = \Delta f(x)$, $M_0N=x-x_0= \Delta x$, т.о.

tg α = $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$,

т.е. угловой коэффициент секущей k = tg α . Если $x \to x_0$ (M приближается к M_0) секущая MM_0, при этом меняет своё положение , меняя угол β и

tgβ = $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

Таким образом можем установить **геометрический смысл производной** : ***Производная функции* f(x) *в точке* x_0 *равна тангенсу угла наклона касательной , проведенной к графику функции в этой точке.***

Замечание. Если функция в точке не имеет производной, то в этой точке нельзя провести касательную к графику.

4.

2. Уравнение касательной.

y=kx+b, k=? , b = ?.]

1.

⇒ 1. $k = \operatorname{tg} \alpha$

$k = f'(x_0)$.

$\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$.

$y = f'(x_0) + b$

1.
2. Найдем b из условия, что касательная проходит через точку с координатами (x_0; $f(x_0)$), т.е.

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$$

$$b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0.$$

3) Подставим полученные значения k и b в уравнение.

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0)$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

$$\mathbf{y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).}$$

2. Уравнение нормали.

$y_н = k_н x + b_н$;

$y_к = k_к x + b_к$.

$k_н \cdot k_к = -1$.

$k_к = f'(x_0) \to k_н = \dfrac{-1}{f'(x_0)}$

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

Пример 1. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $y = x^3 - x^2$ в точке $x_0 = 2$.

Решение: известно, что $tg\alpha = f'(x)$

$f'(x) = (x^3 - x^2)' = 3x^2 - 2x$;

$f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 8$.

$tg\alpha = 8$.

Пример 2. Найдите уравнение касательной и нормали, проведенных к графику функции $f(x) = x^2 - x$, в точке $x_0 = 2$.

Решение: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

$У = x^2 - x$, $x_0 = 2$.

1. $f(x_0) = f(2)$

$f(x_0) = 2^2 - 2 = 2$.

2. $f'(x) = (x^2 - x)' = 2x - 1$.

3. $f'(x_0) = f'(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$.

4. $y = 2 + 3 \cdot (x - 2)$

$y = 2 + 3x - 6$

$y = 3x - 4$ (уравнение касательной)

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

$y = 2 - \frac{1}{3} \cdot (x - 2)$

$y = 2 - \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$

$y = 2\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot x$ (уравнение нормали).

4.5. Физический смысл первой производной.

Когда мы вводили понятие производной, мы рассматривали пример из физики о мгновенной скорости

$V_{мг.} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t)$.

То есть, чтобы найти скорость в любой момент времени t нужно :

1. Найти производную пути по времени,
2. Вычислить значение производной в этой точке .

Физический смысл первой производной: Первая производная путь по времени – это скорость.

В общем случае – производная это скорость изменения функции.

$V(t) = S'(t)$.

Из физики известно, что ускорение это скорость изменения скорости то есть

$a = V'(t)$.

$a = V'(t) = (S'(t))' = S''(t)$.

Физический смысл второй производной: Вторая производная пути по времени – это ускорение.

Пример 3. найдите вторую производную функции $f(x) = x^3 + x^2$.

Решение: $f''(x) = (f'(x))' = ((x^3+x^2)')' = (3x^2 + 2x)' = 6x + 2$.

$f''(x) = (x^3 + x^2)'' = 6x + 2$.

Пример 4. Тело движется по закону: $S(t) = S_0 + V_0 \cdot t + \frac{at^2}{2}$, определите законы по которым изменяются скорость и ускорение.

Решение: Скорость – это производная пути по времени.

$V(t) = S'(t) = (S_0 + V_0 \cdot t + \frac{at^2}{2})' = S_0' + (V_0 \cdot t)' + (\frac{at^2}{2})' = 0 + V_0 + at$.

$V(t) = V_0 + at$.

$a(t) = V'(t) = (V_0 + at)' = 0 + a$.

$a(t) = a$.

Пример 5. Тело движется по закону $S(x) = 10 + 15x^2 + x^3$, найдите скорость тела и ускорение через три секунды после начала движения.

Решение: $V(t) = S'(t)$

$V= (10 + 15x^2 + x^3)' = 30x + 3x^2$.

$V(3) = 30 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 = 90 + 27 = 117$ м/с.

$a = V'(t) = (30x + 3x^2)' = 30 + 6x$.

$a(3) = 30 + 6 \cdot 3 = 30 + 18 = 48$ м/с^2.

Задание:

1. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $f(x) = x^3 – 27$, в точке пересечения этого графика с осью абсцисс.
2. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2 – x^2$ в точке с абсциссой $x = - 3$.
3. Напишите уравнение касательной и нормали, проведенных к параболе $f(x) = 2x^2 + 1$, в точках: $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$.
4. В какой точке касательная к кравой $y = Lnx$ наклонена к оси OX под углом 45°.
5. Под каким углом касательная к кривой $y = e^x$, в точке (0;1) пересекает ось OX.

6. Тело движется прямолинейно по закону $S(t) = 3 + 2t + t^2$. Определите его скорость и ускорение в момент времени t =1сек, t = 3 сек.
7. Скорость тела, движущегося прямолинейно определяется по закону $V(t) = 4t + 5t^2$ (м⁄с). Какое ускорение будет иметь тело через 5 секунд после начала движения?
8. Тело, масса которого 0,5 кг, движется прямолинейно по закону $S(t) = 2t^2 + t - 3$ (м). найдите кинетическую энергию тела через 7 секунд после начала движения.
9. Найдите силу, действующую на точку массой m , движущейся по закону $S(t) = t^2 - 4t^4$ через 3 секунды после начала движения.
10. Тело, выпущенное вертикально вверх со скоростью V_0, движется по закону $h(t) = V_0t - \frac{gt^2}{2}$, h – это путь, t – это время. Найдите наибольшую высоту, которую достигнет тело, если $V_0 = 40$ м⁄с, $g = 10$ м ⁄ $с^2$.

Практическая работа № 8

Тема: Непосредственное интегрирование.

Цель: формирование умения применять непосредственное интегрирование.

Пояснения к работе:

Определение. Функция F(x), определенная на некотором множестве называется первообразной для функции y=f(x) на этом множестве, если выполняется условие $F'(x) = f(x)$

Определение. Если F(x)- одна из первообразных функции f(x), то множество функций вида F(x)+C, где C – произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом функции f(x) и обозначается $\int f(x)dx = F(x) + C$,

где f(x) – подынтегральная функция, f(x)dx – подынтегральное выражение. Дифференциал в подынтегральном выражении указывает переменную интегрирования.

Действие нахождения первообразной называется интегрированием.

Свойства неопределенного интеграла.

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
2. $d\int f(x)dx = f(x)dx$
3. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, где a=const
4. $\int (f(x) + \varphi(x))dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx$
5. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

Основные формулы интегрирования.

1. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C; \alpha \neq -1$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
9. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$
12. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$
13. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$
14. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$

В этих формулах **a** – постоянная величина. Результаты интегрирования можно проверить дифференцированием.

Примеры.

а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \int x^{-\frac{1}{3}} dx =$ /по формуле 1/ $= \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2} = \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2\sqrt[3]{5}} + C$

б) $\int \frac{dx}{3+x^2} = \int \frac{dx}{(\sqrt{3})^2 + x^2} =$ /по формуле 9/ $= \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{x}{\sqrt{3}} + C$

в) $\int \cos 5x dx =$ /по формуле 6 и свойству 5/ $= \frac{1}{5} \sin 5x + C$

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-(3-2x)^2}} =$ /по формуле 10 и свойству 5/ $= -\frac{1}{2} \arcsin \frac{3-2x}{3} + C$

д) $\int \frac{dx}{4-3x} =$ /по формуле 2 и свойству 5/ $= -\frac{1}{3} \ln|4-3x| + C$

е) $\int \frac{\sqrt[3]{x} - 4x + 5\sqrt{x}e^{-3x}}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x^{\frac{1}{3}} - 4x + 5x^{\frac{1}{2}}e^{-3x}}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int \left(x^{-\frac{1}{6}} - 4x^{\frac{1}{2}} + 5e^{-3x} \right) dx =$

$$= \frac{1}{2} \int x^{-\frac{1}{6}} dx - \frac{4}{2} \int x^{\frac{1}{2}} dx + \frac{5}{2} \int e^{-3x} dx = \frac{1}{2} \frac{6x^{\frac{5}{6}}}{5} - 2\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{3} e^{-3x} \right) + C =$$

$$= \frac{3}{5} x^{\frac{5}{6}} - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{6} e^{-3x} + C$$

Практическая работа № 9

Тема: Интегрирование методом замены переменной.

Цель: формирование умения интегрировать методом замены переменной.

Пояснение к работе:

Совокупность всех первообразных функций называется неопределенным интегралом от *f*(*x*). Таким образом, если *F* - некоторая частная первообразная, то справедливо выражение

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C - произвольная постоянная.

Свойства неопределенного интеграла

Пусть *f* и *g* - функции переменной *x*, *F* - первообразная функции *f*, *a, k, C* - постоянные величины. Тогда справедливы равенства:

$$\int\left[f(x)+g(x)\right]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

Во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного интеграла. Такой метод называется *методом подстановки* или *методом замены переменной*. Он основан на следующей теореме.

Теорема. Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором промежутке *T* и пусть *X* – множество значений этой функции, на котором определена функция *f*(*x*). Тогда, если на множестве *X* функция *f*(*x*) имеет первообразную, то на множестве *T* справедлива формула

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \quad (1)$$

Формула (1) называется формулой замены переменной в неопределённом интеграле.

6. Пример выполнения работы

Упражнение 1.

Вычислить

$$\int \frac{4xdx}{(x^2-6)^5}$$

Пусть $t = x^2 - 6$, тогда

$dt=(x^2-6)'dx,$

$dt = 2xdx,$

$$dx = \frac{dt}{2x}$$

Подставим найденные значения в интеграл:

$$\int \frac{4xdx}{(x^2-6)^5} = \int \frac{4x\frac{dt}{2x}}{t^5} = \int \frac{2dt}{t^5} = 2\int t^{-5}dt = \frac{2t^{-4}}{-4} + C = \frac{1}{-2t^4} + C =$$

$$= -\frac{1}{(x^2-6)^4} + C$$

Упражнение 2.

Вычислим $\int \cos 2x\,dx$.

Пусть $t=2x$.

Тогда $dt=(2x)'dx$,

$dt = 2dx$,

$dx = \frac{dt}{2}$

$$\int \cos 2x\,dx = \int cost\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int cost\,dt = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

Упражнение 3.

Вычислить: $\int \sin^2 x \cos x\,dx.$

Пусть $t= sinx$, тогда

$dt=(sinx)'dx$

$dt=cosx\,dt$

$dx=\frac{dt}{cosx}$

Подставим найденные значения в интеграл:

$$\int sin^2 x \cos x\,dx = \int t^2 cosx\,\frac{dt}{\cos x} = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{sin^3 x}{3} + C$$

Метод интегрирования по частям.

Пусть функции U=U(x) и V=V(x) имеют на некотором промежутке непрерывные производные. Из формулы дифференциала произведения d(U•V)=UdV+VdUинтегрированием обеих частей равенства получается формула интегрирования по частям

$$\int UdV = UV - \int VdU$$

Эта формула дает возможность свести вычисления интеграла $\int UdV$ к вычислению интеграла $\int VdU$, который во многих случаях оказывается более простым. Рассмотрим два типа интегралов, которые вычисляются методом интегрирования по частям.

I. Интегралы вида,

$$\int P_n(x)e^{kx}dx,\quad \int P_n(x)\sin kxdx,\ \int P_n(x)\cos kxdx,$$

где $P_n(x)$ - алгебраический многочлен, k – некоторое число. Во всех интегралах обозначаем за $U = P_n(x)$, а оставшееся выражение за dV , причем при нахождении V не записываем константу.

Примеры.

а) $$\int x\sin 5xdx = \left| \begin{matrix} U = x \quad \sin 5xdx = dV \quad dU = dx \\ V = \int \sin 5xdx = -\frac{1}{5}\cos 5x \end{matrix} \right| = UV - \int VdU = -\frac{x}{5}\cos 5x - \int -\frac{1}{5}\cos 5xdx =$$

$$= -\frac{x}{5}\cos 5x + \frac{1}{5}\int \cos 5x dx = -\frac{x}{5}\cos 5x + \frac{1}{25}\sin 5x + C$$

б)
$$\int x e^{-\frac{x}{2}} dx = \left| \begin{matrix} U = x \quad dU = dx \quad dV = e^{-\frac{x}{2}} dx \\ V = \int e^{-\frac{x}{2}} dx = -2e^{-\frac{x}{2}} \end{matrix} \right| = x\left(-2e^{-\frac{x}{2}}\right) - \int -2e^{-\frac{x}{2}} dx = -2xe^{-\frac{x}{2}} + 2\int e^{-\frac{x}{2}} dx =$$

$$= -2xe^{-\frac{x}{2}} - 4e^{-\frac{x}{2}} + C$$

II. Интегралы вида.

$$\int x^{\alpha} \ln x dx, \int P_n(x) \ln x dx, \int P_n(x) arctgkx dx, \int P_n(x) \arcsin kx dx,$$

α - действительное число.

В этих случаях за U принимаем $\ln x$, $arctgkx$, $\arcsin kx$ соответственно.

Примеры.

а)
$$\int \sqrt[5]{x^3} \ln x dx = \left| \begin{matrix} U = \ln x \quad dV = \sqrt[5]{x^3} dx \\ dU = \frac{1}{x} dx \quad V = \int x^{\frac{3}{5}} dx = \frac{5x^{\frac{8}{5}}}{8} \end{matrix} \right| = \frac{5}{8} x^{\frac{8}{5}} \ln x - \int \frac{5x^{\frac{8}{5}}}{8} \frac{1}{x} dx = \frac{5}{8} x^{\frac{8}{5}} \ln x - \frac{5}{8} \int x^{\frac{3}{5}} dx =$$

$$= \frac{5}{8} x^{\frac{8}{5}} \ln x - \frac{25}{64} x^{\frac{8}{5}} + C$$

Интегрирование некоторых тригонометрических выражений.

Интегралы вида: $\int \cos^m x \sin^n x dx$

а) Если показатели m и n четные, положительные , то применяем формулы понижения степени:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \qquad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

Пример.

$$\int \sin^4 2x dx = \int (\sin^2 2x)^2 dx = \int (\frac{1}{2}(1 - \cos 4x))^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x) dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{2}{4}\int \cos 4x dx +$$

$$+ \frac{1}{4}\int \cos^2 4x dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{8}\int (1 + \cos 8x) dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{8}(x + \frac{1}{8}\sin 8x) =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{64}\sin 8x + C$$

б) Если хотя бы один из m или n нечетное, то от нечетной степени отделяем множитель в первой степени и делаем замену sin x = t, если m-нечетное и cos x=t, если n-нечетное.

Пример.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos xdx = dt \\ \cos x^2 = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right| = \int \frac{(1-t^2)}{\sqrt[3]{t^2}}dt =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}dt - \int \frac{t^2}{\sqrt[3]{t^2}}dt = \int t^{-\frac{2}{3}}dt - \int t^{\frac{4}{3}}dt = \frac{3t^{\frac{1}{3}}}{1} - \frac{3t^{\frac{7}{3}}}{7} = 3(\sin x)^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{7}(\sin x)^{\frac{7}{3}} + C =$$

$$3\sqrt[3]{\sin x} - \frac{3}{7}\sqrt[3]{\sin^7 x} + C$$

Интегрирование некоторых дробно-рациональных функций.

Дробно-рациональной функцией называется дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где P(x) и Q(x) алгебраические многочлены.

Если степень многочлена P(x), стоящего в числителе больше или равна степени многочлена Q(x), стоящего в знаменателе, то дробь называется неправильной. Если степень P(x) меньше степени Q(x) , то дробь называется правильной.

При интегрировании неправильной дроби необходимо делением числителя на знаменатель выделить целую часть и представить эту дробь в виде суммы многочлена (целой части) и правильной рациональной дроби.

Пример. Вычислить $\int \frac{2x^4 - x + 5}{x^2 - 4x + 10}dx =$ /делим числитель на знаменатель т.к. дробь неправильная./=

$$\left| \begin{array}{l|l} -\,2x^4 - x + 5 & \underline{x^2 - 4x + 10} \\ \underline{2x^4 - 8x^3 + 20x^2} & 2x^2 + 8x + 12 \\ -\,8x^3 - 20x^2 - x + 5 & \\ \underline{8x^3 - 32x^2 + 80x} & \\ -\,12x^2 - 81x + 5 & \\ \underline{12x^2 - 48x + 120} & \\ -36x - 115 & \end{array} \right| = \int \left(2x^2 + 8x + 12 + \frac{-36x - 115}{x^2 - 4x + 10} \right) dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x^2 - 4x + 10 = \\ = \left(x^2 - 4x + 4\right) - 4 + 10 = \\ = (x-2)^2 + 6 \end{array} \right| = 2\int x^2 dx + 8\int xdx + 12\int dx - \int \frac{36x + 115}{(x-2)^2 + 6}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x - 2 = t \\ x = t + 2 \\ dx = dt \end{array} \right| = 2\frac{x^3}{3} + 8\frac{x^2}{2} + 12x - \int \frac{36(t+2) + 115}{t^2 + 6}dt = \frac{2x^3}{3} + 4x^2 + 12 - \int \frac{36t}{t^2 + 6}dt -$$

$$-\int\frac{187}{t^2+6}dt=\frac{2x^3}{3}+4x^2+12-18\int\frac{2t}{t^2+6}dt-187\int\frac{1}{t^2+6}dt=\frac{2x^3}{3}+4x^2+12-18\ln\left|t^2+6\right|-$$

$$-\frac{187}{\sqrt{6}}arctg\ \frac{t}{\sqrt{6}}=\frac{2x^3}{3}+4x^2+12-18\ln\left|(x-2)^2+6\right|-\frac{187}{\sqrt{6}}arctg\ \frac{(x-2)}{\sqrt{6}}+C$$

Определенный интеграл.

Пусть на отрезке [a,b] задана некоторая функция. Разобьем этот отрезок на n частей, обозначая точки деления через
$a = x_0 < x_1 < x_2 <\ldots< x_{n-1}< x_n = b$, а длины полученных промежутков
$\Delta x_1 = x_1 - x_0;\ \Delta x_2 = x_2 - x_1;\ldots\ \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$

В каждом из отрезков $[x_{i-1};x_i]$ выберем произвольную точку α_i , значение функции в выбранной точке $f(\alpha_i)$ умножим на длину соответствующего отрезка и составим сумму всех таких произведений:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i$$

Полученная сумма называется интегральной. Пусть l - длина наибольшего из частных отрезков Δx_i . Если существует такое число I , что интегральная сумма стремится к I при $l \to 0$ и при любом выборе точек разбиения x_i и α_i , то это число I называется определенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке [a;b] и обозначается

$$I=\lim_{\substack{n\to\infty\\(l\to 0)}}\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\,dx$$

При введении понятия определенного интеграла существенными являются условия ограниченности функции $f(x)$ на отрезке [a;b] . В частности, интегрируемыми являются непрерывные на отрезке функции, монотонные функции, кусочно-монотонные функции.

Основные свойства определенного интеграла.

1) $\int_a^b dx = b-a$

2) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, где с – некоторое число

3) $\int_a^b \left(f_1(x)+f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$

4) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

5) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

6) $\int_a^a f(x)dx = 0$

7) если $f_1(x) \le f_2(x), x \in [a,b], a \le b$, то $\int_a^b f_1(x)dx \le \int_a^b f_2(x)dx$

8) Если $m \le f(x) \le M, x \in [a,b], a \le b$, то $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

9) Если $m \le f(x) \le M, x \in [a,b]$, то существует число $\lambda \in [a,b]$ такое, что $\int_a^b f(x)dx = \lambda(b-a)$

10) Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b], то для любого переменного $x \in [a,b]$ существует интеграл $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ и $F'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$

11) Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b], F(x) – первообразная функции f(x), то $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Данная формула называется формулой Ньютона-Лейбница и, обычно, записывается в виде: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$

Если при вычислении определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции $f(x)$ требуется ввести новую переменную t, такую что $x = \varphi(t), \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$, функция $\varphi(t)$ дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Изменение пределов позволяет не возвращаться по вычислении интеграла к первоначальной переменной x.

Если $U = U(x)$ и $V = V(x)$ - дифференцируемые на отрезке [a,b] функции, то формула интегрирования по частям для определенного интеграла имеет вид:

$$\int_a^b UdV = UV\big|_a^b - \int_a^b VdU$$

Примеры. Вычислить определенные интегралы.

1) $\int_0^4 \left(1 + 2e^{\frac{x}{4}}\right)dx = \int_0^4 dx + 2\int_0^4 e^{\frac{x}{4}}dx = x\big|_0^4 + 8e^{\frac{x}{4}}\big|_0^4 = (4-0) + 8(e - e^0) = 4 + 8e - 8 = 8e - 4$

2) $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1} - 2\sqrt[3]{3x+1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt[6]{3x+1} = t \quad 3x+1 = t^6 \\ x = \frac{1}{3}(t^6 - 1) \quad dx = 2t^5 dt \\ Если \quad x = 0, то \quad t = 1 \\ Если \quad x = 1, то \quad t = \sqrt[6]{4} = \sqrt[3]{2} \end{array} \right| = \int_1^{\sqrt[3]{2}} \frac{2t^5 dt}{\sqrt{t^6} - 2\sqrt[3]{t^6}} =$$

$$= \int_1^{\sqrt[3]{2}} \frac{2t^5 dt}{t^3 - 2t^2} = \int_1^{\sqrt[3]{2}} \frac{2t^5 dt}{t^2(t-2)} = 2\int_1^{\sqrt[3]{2}} \frac{t^3}{t-2}dt = 2\int_1^{\sqrt[3]{2}} \frac{t^3 - 8 + 8}{t-2}dt = 2\int_1^{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{t^3-8}{t-2} + \frac{8}{t-2}\right)dt =$$

$$= 2\int_1^{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{(t-2)(t^2+2t+4)}{t-2}+\frac{8}{t-2}\right)dt = 2\int_1^{\sqrt[3]{2}}\left(t^2+2t+4+\frac{8}{t-2}\right)dt =$$

$$= 2\left(\int_1^{\sqrt[3]{2}} t^2 dt + 2\int_1^{\sqrt[3]{2}} t\ dt + 4\int_1^{\sqrt[3]{2}} dt + 8\int_1^{\sqrt[3]{2}}\frac{1}{t-2}dt\right) = 2\left(\frac{t^3}{2}\Big|_1^{\sqrt[3]{2}} + t^2\Big|_1^{\sqrt[3]{2}} + 4t\Big|_1^{\sqrt[3]{2}} + 8\ln|t-2|\Big|_1^{\sqrt[3]{2}}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+\sqrt[3]{4}-1+4\sqrt[3]{2}-4+8\ln\left|\sqrt[3]{2}-2\right|-8\ln|1-2|\right)\approx -0,895$$

3) $$\int_0^1(4-3x)e^{-2x}dx = \begin{vmatrix} U=4-3x & dV=e^{-2x}dx \\ dU=-3dx & V=-\frac{1}{2}e^{-2x}\end{vmatrix} = -\frac{1}{2}e^{-2x}(4-3x)\Big|_0^1-\frac{3}{2}\int_0^1 e^{-2x}dx = e^{-2x}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(e^{-2}(4-3)-e^0 4\right)+\frac{3}{4}e^{-2x}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}\left(e^{-2}-4\right)+\frac{3}{4}\left(e^{-2}-e^0\right) = -\frac{1}{2}e^{-2}+2+\frac{3}{4}e^{-2}-\frac{3}{4} =$$

$$= \frac{1}{4}e^{-2}+\frac{5}{4}\approx 1,284$$

Рекомендуемая литература

1. Дадаян А.А. Математика: Учебник – 2-е издание.- М.: Форум: Инфра.-М.2006- 552 с. (Профессиональное образование)
2. Григорьев В. П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики: Учебник для студентов учреждения среднего профессионального образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2004- 320 с.
3. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник – М.: Министерство, 2001 – 304 с.
4. Конспект лекций
5. Настоящая методическая разработка

Практическая работа № 10

Тема: Приложение определенного интеграла к решению прикладных задач.
Цель: формирование умения применять определенный интеграл к решению пикладных задач.
Пояснения к работе:

Путь (перемещение)

Предположим, что точка движется по прямой (по оси OX)
Какой путь она пройдет за время t?
Из физики известно, если $V = const$, то $S = V \cdot t$.
Если движение равноускоренное, то путь считают функцией времени $S = s(t)$, тогда скорость в любой момент времени равна производной пути $V = S'(t)$.
Скорость изменения скорости – это ускорение, $a = V'(t)$, $a = S''(t)$.

Обратная задача.

Если известен закон изменения скорости, то S – это первообразная для V, т.е. $S = \int V(t)dt$, а a – первообразная для V, т.е. $V = \int a(t)dt$.

Как найти перемещение точки за промежуток времени [t_1 ; t_2]?

Если скорость точки постоянна и равна V, то перемещение вычисляется так:

$$S = V(t_2 - t_1)$$

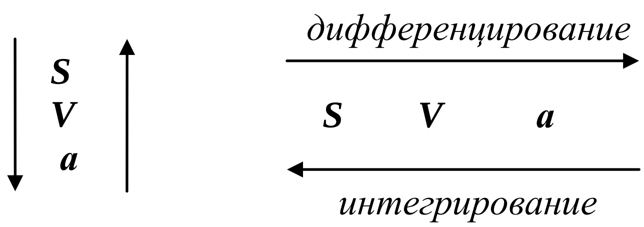
Пусть теперь это скорость меняется и задан закон этого изменения $V=V(t)$.
Известно, что $S = \int V(t)dt$
Перемещение за промежуток времени [t_1 ; t_2] равно:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} V(t)dt$$

$a = a(t)$ - закон изменения ускорения.

Тогда $V = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt$

Полезная схема:



Пример Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t)=3t^2+4t+1$ (м/с). Найти путь, пройденный телом за первые 3с.
Решение.
Так как путь, пройденный за промежуток времени выражается интегралом, то

$$S = \int_0^3 (3t^2 + 4t + 1)dt = \left(t^3 + 2t^2 + t\right)\Big|_0^3 = 48 \text{ (м)}$$

<u>**Задача №1**</u> Скорость поезда, движущегося под уклон, задана уравнением $v(t) = 15+0,2t$. Вычислите длину уклона, если поезд прошел его за 15 секунд.
<u>Решение.</u> Согласно формуле имеем

$$S = \int_0^{15} (15 - 0,2t)dt = \left(15t - 0,1t^2\right)\Big|_0^{15} = 15 \cdot 15 - 0,1 \cdot 15^2 = 202,5 \text{(м)}$$

Задача №2 Поезд движется прямолинейно со скоростью $V = 12t - 3t^2$ (м/с). Найти длину пути, пройденного поездом от начала движения до остановки.
Решение. Скорость движения равно нулю в моменты начала движения и остановки. Найдем момент остановки, для чего решим уравнение

$$12t - 3t^2 = 0$$
$$3t(4 - t) = 0$$
$$t_1 = 0,\ \ t_2 = 4$$
$$S = \int_0^4 (12t - 3t^2)dt = \left(6t^2 - t^3\right)\Big|_0^4 = 3 \cdot 4^2 - 4^3 = 32\,(\text{м})$$

Задача №3 Скорость движения тела изменяется по закону $v(t) = 2t$ м/с. Найти длину пути, пройденного телом за 3-ю секунду его движения.

Решение. $s = \int\limits_2^3 2tdt = t^2\Big|_2^3 = 9 - 4 = 5\,(\text{м})$

Задача №4 Тело брошено вертикально вверх со скоростью, которая изменяется по закону $v(t) = (29{,}4 - 9{,}8t)$ м/с. Найти наибольшую высоту подъема.
Решение: Найдем время, в течении которого тело поднималось вверх: $29{,}4 - 9{,}8t = 0$ (в момент наибольшего подъема скорость равна нулю; $t = 3$(с). Поэтому $s = \int\limits_0^3 (29{,}4 - 9{,}8t)dt = 9{,}8(3t - \dfrac{t^2}{2}t^2)\Big|_0^3 = 44{,}1$ (м).

Задача №5 Два тела одновременно выходят из одной точки: одно – со скоростью $v_1 = 5t$ м/с, другое – со скоростью $v_2 = 3t^2$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 20 с, если движутся по прямой в одном направлении?
Решение: $s_1 = \int\limits_0^{20} 5tdt = 1000\,(\text{м}),\ s_2 = \int\limits_0^{20} 3t^2dt = 8000$ (м). $s = s_2 - s_1 = 7000\,(\text{м})$

Задача №6 Два тела одновременно начали прямолинейное движение из некоторой точки в одном направлении со скоростями $v_1 = (6t^2 + 4t)$ м/с и $v_2 = 4t$ м/с. Через сколько секунд расстояние между ними будет равно 250 м?
Решение: Пусть t_1 - момент встречи. Тогда

$$s_1 = \int\limits_0^{t_1} (6t^2 + 4t)dt = (2t^3 + 2t^2)\Big|_0^{t_1} = 2t_1^3 + 2t_1^2;$$

$$s_2 = \int\limits_0^{t_1} 4tdt = 2t^2\Big|_0^{t_1} = 2t_1^2.$$

Так как $s_1 - s_2 = 250$, то получаем уравнение $2t_1^3 + 2t_1^2 - 2t_1^2 = 250$, откуда $t = 5$ (с)

Задача №7 Электровоз движется с ускорением, меняющимся по закону $a = 3t^2 - 4t + 2$. В момент времени t_0 = 1с электровоз имел скорость V_0 = 0,05м/с.
Вычислить скорость движения электровоза в момент времени t = 3с.
Решение: Скорость – это первообразная ускорению, находим формулу для вычисления скорости $V = \int\left(3t^2 - 4t + 2\right)dt = t^3 - 2t^2 + 2t + C$
Найдем C из условия $V(1) = 0{,}05$

$0{,}05 = 1^3 - 2\cdot 1^2 + 2\cdot 1 + C$

$C = -0{,}95$

Отсюда $V = t^3 - 2t^2 + 2t - 0{,}95$

I. Обобщение материала по разделу «Начала математического анализа»

Итог. Рассмотрев зависимости между физическими величинами, можем сделать вывод, что физические задачи делятся на две категории – нахождение производной и нахождение первообразной (интеграла). Рассмотрим некоторые задачи на применение производной и интеграла используя схему (1).

Задача №7 (кейс задача) Электровоз движется прямолинейно изменяется по закону $V(t) = 4t^3 - 6t + 3$ (м/с).

Какая скорость была у электровоза в момент времени $t = 2$с .

Найти ускорение электровоза в момент времени $t = 2$с.

Путь, пройденный электровозом за 2 секунды от начала движения.

Решение.

Скорость в момент времени – это значение функции при $t = 2$: $V(2) = 4\cdot 2^3 - 6\cdot 2 + 3 = 23$ м/с

Ускорение тела определяется выражением $a = V'(t) = \left(4t^3 - 6t + 3\right)' = 12t^2 - 6$

Тогда $a(2) = 12\cdot 2^2 - 6 = 42$ (м/с^2).

$$S = \int_0^2 (4t^3 - 6t + 3)dt = \left(t^4 - 3t^2 + 3t\right)\Big|_0^2 = 2^4 - 6\cdot 2 + 3\cdot 2 = 10 \text{ (м)}$$

Задания:

№1 Скорость поезда, движущегося под уклон, задана уравнением $v(t) = 15 + 0{,}2t$. Вычислите длину уклона, если поезд прошел его за 15 секунд.

№2 Поезд движется прямолинейно со скоростью $V = 6t - t^2$ (м/с). Найти длину пути, пройденного поездом от начала движения до остановки.

№3 Скорость движения тела изменяется по закону $v(t) = 2t$ м/с. Найти длину пути, пройденного телом за 3-ю секунду его движения.

№4 Тело брошено вертикально вверх со скоростью, которая изменяется по закону $v(t) = (29{,}4 - 9{,}8t)$ м/с. Найти наибольшую высоту подъема.

№5 Два тела одновременно выходят из одной точки: одно – со скоростью $v_1 = 5t$ м/с, другое – со скоростью $v_2 = 3t^2$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 20 с, если движутся по прямой в одном направлении?

№6 Два тела одновременно начали прямолинейное движение из некоторой точки в одном направлении со скоростями $v_1 = (6t^2 + 4t)$ м/с и $v_2 = 4t$ м/с. Через сколько секунд расстояние между ними будет равно 250 м?

№7 Электровоз движется с ускорением, меняющимся по закону $a = 3t^2 - 4t + 2$. В момент времени $t_0 = 1$с электровоз имел скорость $V_0 = 0{,}05$м/с.

Вычислить скорость движения электровоза в момент времени $t = 3$с.

№8 Скорость электровоза, движется прямолинейно изменяется по закону $V(t) = 4t^3 - 6t + 3$ (м/с).

Какая скорость была у электровоза в момент времени $t = 2$с.

Найти ускорение электровоза в момент времени $t = 2$с.

Путь, пройденный электровозом за 2 секунды от начала движения.

Практическая работа № 11

Тема: Транспонирование матриц. Нахождение обратной матрицы.
Цель: формирование умения находить транспонированную и обратную матрицу.
Пояснения к работе:
Сложение матриц.
Складывать можно матрицы только <u>одинаковой размерности</u>.
<u>Определение.</u> Суммой двух матриц A и B называется матрица C (той же размерности, что и матрицы A и B), элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}}_{C}$$

Пример 1. Сложите матрицы A и B

а) **A=**$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ -1 & 0{,}5 & 3 \end{pmatrix}$

б) A=$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, B$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

<u>Решение.</u>
а) Согласно определению сложения матриц имеем

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ -1 & 0{,}5 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+0 & 2+3 & 4+7 \\ -1+(-1) & 5+0{,}5 & 7+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 11 \\ -2 & 5{,}5 & 10 \end{pmatrix}.$$

б) Данные матрицы A и B сложить невозможно, так как их размерность различна, точнее, матрица A имеет размерность 3 x 2, а матрица B – 2 x 2.

Умножение матрицы на число.
<u>Опр.</u> Для того, чтобы умножить число k $(k \in R)$ на матрицу A нужно это число k умножить на каждый элемент матрицы A, в результате мы получаем матрицу той же размерности, что и матрица A:

$$k\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & \cdots & k\cdot a_{1n} \\ k\cdot a_{21} & k\cdot a_{22} & \cdots & k\cdot a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k\cdot a_{m1} & k\cdot a_{m2} & \cdots & k\cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Пример 2. Вычислить: $3\cdot\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -\dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$

Решение.

$$3\cdot\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 3 & -\dfrac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot 3 & 4\cdot 3\\ 3\cdot 3 & -\dfrac{1}{3}\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 12\\ 9 & -1\end{pmatrix}$$

Умножение матриц.

<u>Опр.</u> Произведением матрицы А, имеющей размерность <u>m x n</u>, на матрицу В имеющей размерность <u>n x p</u> называется матрица С, имеющая размерность m x p, и элементы матрицы С определяются следующей формулой:

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj}\text{ , i=1,2, … , m, j=1,2, … , p.}$$

$$\underset{m\ x\ n}{\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}}\cdot\underset{n\ x\ p}{\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{pmatrix}}=\underset{n\ x\ p}{\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn}\end{pmatrix}}$$

Для обозначения произведения матрицы А на матрицу В используют запись: С=А·В.

<u>Очень важное замечание;</u> матрицу А можно умножить не на всякую матрицу В. Для того чтобы можно было перемножить матрицы А и В нужно, чтобы число строк матрицы В совпадало с числом столбцов матрицы А, а в результате произведения мы получаем матрицу, которая имеет столько строк, сколько матрица А и столько столбцов сколько матрица В.

Пример 3.

Выполните умножение матриц:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

Решение.

а) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1\cdot 2+2\cdot 1+4\cdot 0\\ 2\cdot 2+0\cdot 1+1\cdot 0\\ 1\cdot 2+2\cdot 1+0\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 4\\ 4\end{pmatrix}$

б) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1\cdot 1+2\cdot 0+4\cdot 1 & 1\cdot 3+2\cdot 2+4\cdot 1 & 1\cdot 0+2\cdot 2+4\cdot 0\\ 2\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 1 & 2\cdot 3+0\cdot 2+1\cdot 1 & 2\cdot 0+0\cdot 2+1\cdot 0\\ 1\cdot 1+2\cdot 0+0\cdot 1 & 1\cdot 3+2\cdot 2+0\cdot 1 & 1\cdot 0+2\cdot 2+0\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 11 & 4\\ 3 & 7 & 0\\ 1 & 7 & 4\end{pmatrix}$

Для того, чтобы матрицу А возвести в степень n, ее нужно n раз умножить саму на себя

Пример 4. Найдите A^4, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Решение.

$$\mathbf{A^4}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицу, обратную к матрице А, обозначают A^{-1}.

Рассмотрим квадратную матрицу А порядка n:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Пусть D_A=det A (определитель А), тогда обратная матрица к матрице А задается формулой:

$$A^{-1}=\frac{1}{D_A}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$, i=1, 2 …, n; j=1, 2 …, n.

A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в матрице А,

M_{ij} – минор – определитель, полученный вычеркиванием $i^{ой}$ строки $j^{ого}$ столбца в матрице А.

Замечание: первый индекс элемента обратной матрицы показывает на то, к какому столбцу принадлежит данный элемент, второй – к какой строке принадлежит данный элемент.

Правило нахождения обратной матрицы к квадратной матрице второго порядка:

Чтобы найти обратную матрицу к квадратной матрице второго порядка нужно поменять местами элементы, стоящие на главной диагонали и приписать знак минус к элементам, стоящим на побочной диагонали и полученную матрицу умножить на $\frac{1}{D_A}$.

Пример 5. Найдите обратную матрицу для квадратной матрицы третьего порядка

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$A^{-1}=\frac{1}{D_A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix};$$

$$D_A=\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix}=3\cdot(-3)\cdot1+2\cdot(-5)+3\cdot(4)\cdot1-(5\cdot(-3)\cdot3+1\cdot(-5)\cdot3+1\cdot(-4)\cdot2)=9-50-12+45+15+ +8=-1.$$

Далее находим элементы обратной матрицы:

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot M_{11}=\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}=3+5=8$, $A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot M_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-(-2-3)=5$,

$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot M_{13}=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=-10+9=-1$, $A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot M_{21}=\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}=-(4+25)=-29$,

$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot M_{22}=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-3-15=-18$, $A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot M_{23}=\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=-(4+25)=-29$,

$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot M_{31}=\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=-4+15=11$, $A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot M_{32}=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-(3-10)=7$,

$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot M_{33}=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-9+8=-1$.

Имеем, $A^{-1}=-\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} 8 & -29 & 11 \\ 5 & -18 & 7 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Проверка: $A\cdot A^{-1}=E$

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 8 & -29 & 11 \\ 5 & -18 & 7 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы рассмотрим на примере.

Пример 6.

Решите систему

$$\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x+3y-4z=20 \\ 3x-2y-5z=6 \end{cases}$$

Решение.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Запишем систему в матричном виде: $A\cdot X=B$. Найдём X, получим $X=A^{-1}\cdot B$.

Найдём обратную матрицу

$$A^{-1}=\frac{1}{D_A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

$$D_A=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}-(-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=1\cdot(-15-8)+2\cdot(-10+12)+3\cdot(-4-9)=$$

$$=-23+4-39=-58\ .$$

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot M_{11}==\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}=-15-8=-23,$

$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot M_{12}= -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=-(-10+12)=-2,$

$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot M_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=-4-9=-13,$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot M_{21}=-\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}=-(10+6)=-16,$

$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot M_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=-5-9=-14,$

$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot M_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=-(-2+6)=-4,$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot M_{31}=\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=8-9=-1,$

$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot M_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=-(-4-6)=10,$

$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot M_{33}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3+4=7.$

$$A^{-1}=-\frac{1}{58}\begin{pmatrix} -23 & -16 & -1 \\ -2 & -14 & 10 \\ -13 & -4 & 7 \end{pmatrix}=\frac{1}{58}\begin{pmatrix} 23 & 16 & 1 \\ 2 & 14 & -10 \\ 13 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{58}\begin{pmatrix} 23 & 16 & 1 \\ 2 & 14 & -10 \\ 13 & 4 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{58}\begin{pmatrix} 23\cdot 6+16\cdot 20+1\cdot 6 \\ 2\cdot 6+14\cdot 20-10\cdot 6 \\ 13\cdot 6+4\cdot 20-7\cdot 6 \end{pmatrix}=\frac{1}{58}\begin{pmatrix} 464 \\ 232 \\ 116 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ответ : x=8, y=4, z=2.

Задания для самостоятельного решения

1. Выполните действия над матрицами

A+B, -2,5B, AB, AC

а) $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -7 & 6 & 3{,}5 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 7 & 2 \\ -6 & -7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

б) $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 6{,}5 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & -7 & 6 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

в) $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2{,}5 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

г) $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1{,}5 & 0 & -6 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Решите систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы

а) $\begin{cases} 2x+y+2z=1 \\ 3x-y+2z=1 \\ 4x-y+5z=-3 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x+2y-z=-3 \\ 2x-y+3z=21 \\ x+y-z=-5 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x-y-3z=0 \\ x+3y-4z=-11 \\ 3x+2y-z=7 \end{cases}$

г) $\begin{cases} 4x+3y+2z=1 \\ 2x-5y-3z=16 \\ 3x+2y+4z=4 \end{cases}$

Практическая работа № 12

Тема: Решение системы линейных уравнений матричным способом.

Цель: формирование умения решать СЛАУ матричным способом.

Пояснения к работе:

1. Системы линейных уравнений (общие сведения)

Пусть задана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ ------------------ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Решением системы (1) называется совокупность чисел ($k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n$), которая при подстановке в систему (1) вместо неизвестных обращает каждое уравнение системы в тождество. Система может иметь решение, тогда она называется *совместной*, причем, если решение единственное, *система определенная*, если решений множество – *система неопределенная*. Если система не имеет решений, она называется *несовместной*.

3. Матричный способ

Систему можно решить и матричным способом.

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (4)$$

Составим матрицу системы из коэффициентов при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Из неизвестных x_1, x_2, x_3 и свободных членов составим матрицы – столбцы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Тогда система (4) в матричной форме примет вид

$$A \cdot X = B.$$

Чтобы найти матрицу X, умножим (5) на A^{-1} слева.

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

Пример 4.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Найти обратную матрицу A^{-1}.

РЕШЕНИЕ.

1) Составляем и вычисляем определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-1+0+4+3-4-0=2.$$

Определитель вычислен по правилу треугольника.

2) Транспонируем матрицу. Получаем

$$A^{T}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

3) Вычисляем алгебраические дополнения

$$A_{11};\quad A_{12};\quad A_{13};\quad A_{21};\quad A_{22};\quad A_{23};\quad A_{31};\quad A_{32};\quad A_{33}.$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix};\qquad M_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1-4=-5;$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot(-5)=-5.$$

Вычисляем A_{12}. Вычеркиваем первую строку и второй столбец. Составляем определитель второго порядка из оставшихся элементов.

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix};\qquad M_{12}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=2-6=-4.$$

Вычисляем $A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot(-4)=4.$

Аналогично вычисляем все остальные алгебраические дополнения:

$$A_{13}=7;\quad A_{21}=2;\quad A_{22}=-2;\quad A_{23}=-2;\quad A_{31}=1;\quad A_{32}=0;\quad A_{33}=-1.$$

Составим обратную матрицу

$$\mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5 & 4 & 7\\ 2 & -2 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-5/2 & 2 & 7/2\\ 1 & -1 & -1\\ 1/2 & 0 & -1/2\end{pmatrix}$$

Сделаем проверку

$$\mathrm{E}=A^{-1}\cdot A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5 & 4 & 7\\ 2 & -2 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Пример 5.

Решить систему матричным способом

$$\begin{cases} 5x+3y-z=7 \\ 2x-3y+2z=9 \\ x+2y+3z=1 \end{cases}.$$

Из коэффициентов при неизвестных составим матрицу A:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Из неизвестных составим матрицу – столбец:

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Из свободных членов составим матрицу – столбец:

$$B=\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда система запишется в виде

$$A\cdot X=B.$$

Получили матричное уравнение. Умножаем обе части этого уравнения на A^{-1} слева. Получаем:

$$X=A^{-1}\cdot B.$$

Находим обратную матрицу:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=84; \qquad A^T=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 13 & 11 & -3 \\ 4 & -16 & 12 \\ -7 & 7 & 21 \end{pmatrix}$ (матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов; $A^{-1}=\dfrac{1}{84}\cdot\begin{pmatrix} 13 & 11 & -3 \\ 4 & -16 & 12 \\ -7 & 7 & 21 \end{pmatrix}$ (обратная матрица).

Умножая обратную матрицу на B, получаем матрицу X.

$$X=\frac{1}{84}\cdot\begin{pmatrix} 13 & 11 & -3 \\ 4 & -16 & 12 \\ -7 & & 21 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{84}\cdot\begin{pmatrix} 187/84 \\ -26/21 \\ 5/12 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем ответ:

$$x = \frac{187}{84}; \qquad y = -\frac{26}{21}; \qquad z = \frac{5}{12}.$$

Сравните решение этой системы с решением метода Гаусса.

Задание 1. Решить систему уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса матричным методом:.

а) $\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 32 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

Задание 2. Решить систему уравнений методом Крамера:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ x_1 + 6x_3 = 13 \end{cases}$

Практическая работа № 13

Тема: Решение системы линейных уравнений методом Крамера.

Цель: формирование умения СЛАУ методом Крамера.

Пояснения к работе:

1. Системы линейных уравнений (общие сведения)

Пусть задана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ ------------------ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Решением системы (1) называется совокупность чисел ($k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n$), которая при подстановке в систему (1) вместо неизвестных обращает каждое уравнение системы в тождество. Система может иметь решение, тогда она называется *совместной*, причем, если решение единственное, *система определенная*, если решений множество – *система неопределенная*. Если система не имеет решений, она называется *несовместной*.

2. Метод Крамера

При решении методом Крамера используем определители n-го порядка. Пусть задана система (1). Составим главный определитель системы из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ -- & -- & -- & -- \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ТЕОРЕМА. Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то систему (3) можно решить по формуле Крамера, причем это решение единственное:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \qquad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; \qquad \ldots; \qquad x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta},$$

где определитель Δx_i может быть получен из главного определителя путем замены i-го столбца на столбец из свободных членов.

Пример 1.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}.$$

Составляем главный определитель, элементами которого являются коэффициенты при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix}$$

и три вспомогательных определителя:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix}; \qquad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}; \qquad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix}.$$

Определитель Δx_1 составлен из определителя Δ путем замены элементов первого столбца свободными членами системы уравнений. В определителях Δx_2 и Δx_3 соответственно второй и третий столбцы заменены свободными членами. Вычислим все четыре определителя.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 5 + 12 + 21 + 10 - 21 + 6 = 33;$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 20 + 48 + 7 + 40 - 84 + 2 = 33;$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 24 + 24 - 2 - 24 + 12 = 33;$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -40 + 4 + 84 + 40 - 7 - 48 = 33.$$

Неизвестные x_1, x_2, x_3 находим по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \qquad x_1 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; \qquad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta};$$

$$x_1 = \frac{33}{33} = 1; \qquad x_2 = \frac{33}{33} = 1; \qquad x_3 = \frac{33}{33} = 1.$$

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$.

Пример2. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$ методом Крамера.

Решение. Выписываем A - матрицу системы и B - столбец свободных членов: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$. Далее вычисляем определители:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2(16 - 4) - (-1)(12 + 16) - 1(-6 - 12) = 60 \neq 0;$$

$$|A|_1=\begin{vmatrix}4 & -1 & -1\\ 11 & 4 & -2\\ 11 & -2 & 4\end{vmatrix}=4(16-4)-(-1)(44+22)-1(-22-44)=180;$$

$$|A|_2=\begin{vmatrix}2 & 4 & -1\\ 3 & 11 & -2\\ 3 & 11 & 4\end{vmatrix}=2(44+22)-4(12+6)-1(33-33)=60;$$

$$|A|_3=\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 3 & 4 & 11\\ 3 & -2 & 11\end{vmatrix}=2(44+22)-(-1)(33-33)+4(-6-12)=60.$$

По теореме Крамера $x_1=\dfrac{|A|_1}{|A|}=\dfrac{180}{60}=3;\quad x_2=\dfrac{|A|_2}{|A|}=\dfrac{60}{60}=1;\quad x_3=\dfrac{|A|_3}{|A|}=\dfrac{60}{60}=1.$

Ответ: $x_1=3$; $x_2=1$; $x_3=3$.

Для проверки результата подставим полученные значения неизвестных в каждое уравнение системы: $2\cdot 3-1-1\equiv 4$, $3\cdot 3+4\cdot 1-2\cdot 1\equiv 11$, $3\cdot 3-2\cdot 1+4\cdot 1\equiv 11$. Все уравнения обратились в тождества, значит, решение найдено верно.

Условия неопределенности и несовместности системы двух линейных уравнений с двумя переменными.

Если определитель системы $\Delta=0$, то система является либо несовместной (когда $\Delta_{x_1}\neq 0$ и $\Delta_{x_2}\neq 0$), либо неопределенной (когда $\Delta_{x_1}=0$ и $\Delta_{x_2}=0$). В последнем случае система сводится к одному уравнению, а другое является следствием этого уравнения.

Условия несовместности системы двух линейных уравнений с двумя переменными можно записать в виде:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{в_1}{в_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$$

Условия неопределенности системы двух линейных уравнений с двумя переменными можно записать в виде:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{в_1}{в_2}=\frac{c_1}{c_2}$$

Если один из вспомогательных определителей отличен от нуля, то система уравнений (1) не имеет решения (если $\Delta=0$).

Если главный и все вспомогательные определители равны нулю, то система (1) имеет бесконечно много решений.

Если главный определитель отличен от нуля, то система уравнений (1) имеет единственное решение.

Задание 1. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

а) $\begin{cases}3x-4y=18\\ 2x+5y=19\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}5x-2y=7\\ 3x+4y=25\end{cases}$

Задание 2. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases}\dfrac{x+2y}{4}-\dfrac{x-2y}{2}-\dfrac{7-2y}{3}=1-x\\ 3x-2y=8\end{cases}$$

Задание 3. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 2 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 4x - 6y = 3 \end{cases}$

Задание 4.

а) При каком значении ***a*** система $\begin{cases} 14x + 32y = 25 \\ 28x + ay = 7 \end{cases}$ не имеет решений?

б) При каком значении ***a*** система $\begin{cases} 7x - 12y = 81 \\ 49x - ay = 567 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

Задание 5. Решить систему уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса матричным методом:.

а) $\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 32 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

Задание 6. Решить систему уравнений методом Крамера:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ x_1 + 6x_3 = 13 \end{cases}$

Задание 7. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} ax + 2y = a \\ 8x + ay = 2a \end{cases}$$

Практическая работа № 14

Тема: Решение системы линейных уравнений методом Гаусса.
Цель: формирование умения СЛАУ методом Гаусса.
Пояснения к работе:

1. Системы линейных уравнений
(общие сведения)

Пусть задана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ ------------------ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Решением системы (1) называется совокупность чисел (k_1, k_2, …, k_n), которая при подстановке в систему (1) вместо неизвестных обращает каждое уравнение системы в тождество. Система может иметь решение, тогда она называется *совместной*, причем, если решение единственное, *система определенная*, если решений множество – *система неопределенная*. Если система не имеет решений, она называется *несовместной*.

3. Метод Гаусса

Эффективным методом решения и исследования систем линейных уравнений является метод последовательного исключения неизвестных, или метод Гаусса.

Идея метода Гаусса состоит в том, что данная система линейных уравнений преобразуется в равносильную ей систему специального вида, которая легко исследуется и решается.

Пример 3.

$$\begin{cases} 5x + 3y - z = 7 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}.$$

В результате элементарных преобразований добиваются того, чтобы в последнем уравнении системы осталось одно неизвестное (z), во втором – 2 неизвестных (y и z) а в первом – 3 неизвестных (x, y, z). За ведущее уравнение берется то, в котором коэффициент при x равен 1. Если такого уравнения нет, то его легко получить, разделив любое из уравнений системы на коэффициент при x.

Ведущим уравнением данной системы будет последнее. Перепишем систему так:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \\ 5x + 3y - z = 7 \end{cases} \quad (2)$$

Умножаем первое уравнение на (-2) и складываем со вторым, чтобы избавиться от x во втором уравнении. Результат сложения записываем на месте второго уравнения. Далее первое уравнение умножаем на (-5) и складываем с третьим, чтобы избавиться от x в третьем уравнении. Результат записываем на месте третьего уравнения. Первое уравнение при этом переписываем без изменений. Получим:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ \quad -7y-16z=2 \\ \quad -7y-4z=7 \end{cases} \quad (3)$$

Системы уравнений (2) и (3) эквиваленты, т. е. они обе несовместны, или же обе совместны и имеют одни и те же решения.

Умножаем второе уравнение системы (5) на (-1) и складываем с третьим, чтобы избавиться от y в третьем уравнении. Первое уравнение при этом не трогаем. Результат записываем на месте третьего уравнения. Тогда

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ \quad -7y-16z=2. \\ \qquad\quad 12z=5 \end{cases}$$

Из последнего уравнения $z=\dfrac{5}{12}$. Подставляем это значение z во втрое уравнение системы и находим y:

$$-7y-16\cdot\frac{5}{12}=2$$

$$y=-\frac{26}{21}.$$

В первое уравнение подставляем значения z и y, получаем

$$x+2\cdot\left(-\frac{26}{11}\right)+3\cdot\frac{5}{12}=1$$

$$x=\frac{187}{84}.$$

Ответ: $x=\dfrac{187}{84}$; $y=-\dfrac{26}{21}$; $z=\dfrac{5}{12}$.

Рекомендуется сделать проверку.

Задание 1. Решить систему уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса матричным методом:.

а) $\begin{cases} 7x_1-3x_2+5x_3=32 \\ 5x_1+2x_2+x_3=11 \\ 2x_1-x_2+3x_3=14 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 5x_1-3x_2+4x_3=6 \\ 2x_1-x_2-x_3=0 \\ x_1-2x_2+x_3=0 \end{cases}$

Задание 2. Решить систему уравнений методом Крамера:

а) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=5 \\ 2x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+3x_2+4x_3=1 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3=9 \\ -2x_1+3x_2-4x_3=-16 \\ x_1+6x_3=13 \end{cases}$

Практическая работа № 15

Тема: Операции над множествами.

Цель: развитие практических навыков задания множеств, выполнения операций над множествами.

Пояснения к работе:

Основные понятия.

1 Множество - это совокупность, класс отличающихся друг от друга объектов, объединенных каким-либо общим свойством. Объекты, входящие в эту совокупность, называются элементами множества.

2 Существует два основных способа задания неупорядоченных множеств:

а) перечисление всех его элементов;

б) описание характеристического (общего) свойства его элементов

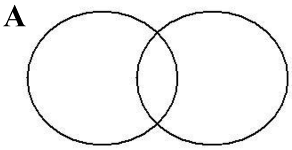
3 Если каждый элемент множества А принадлежит множеству В, то А называют подмножеством множества В. Обозначения: А □ В (А принадлежит В, А включено в В, А содержится в В и т.д.), В □ А (В включает А, В содержит А и т.д.).

4 Если А □ В и существует хотя бы один элемент множества В, не принадлежащий множеству А, то А – собственная часть В, т.е. А строго включается в В. Обозначение: А □ В.

5 Множества А и В называются равными, если А □ В и В □ А. Обозначение: А = В.

6 Объединением (суммой множеств А и В называется множество, обозначаемое через А□В, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат множеству А или В. Краткая запись: А□В = {x | x□ А или x□ В}. Соответствующая диаграмма Эйлера – Венна:

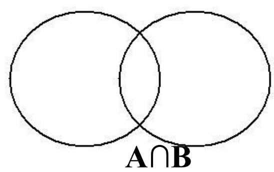
A **B**



A∪B

7 <u>Пересечением</u> (произведением) множеств А и В называется множество, обозначаемое через А□В и состоящее из тех и только из тех элементов, которые принадлежат множеству А и множеству В. Краткая запись: А□В = {x | x□А и x□В}. Соответствующая диаграмма Эйлера- Венна:

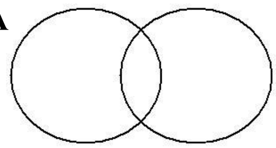
A **B**



A∩B

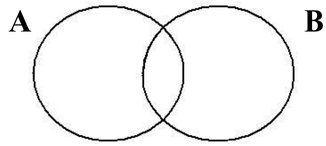
8 Разностью множеств А и В называется множество, обозначаемое через А\В и состоящее из тех и только из тех элементов, которые принадлежат А и не принадлежат В. Краткая запись: А\В = {x| x□ А и x□В}. Соответствующая диаграмма Эйлера- Венна:

A **B**



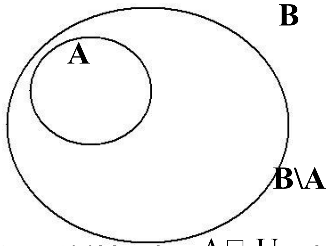
A\B

9 Симметрической разностью множеств A и B называется множество, обозначаемое A□B и состоящее из тех и только из тех элементов, которые принадлежат A\B или B\A.



Краткая запись: A□B= {x|x□A\Bили x□B\A}. **A B=A\BᴜB\A**
Соответствующая диаграмма Эйлера- Венна:

10 Если множество A□ B, то разность B\A называется дополнением множества A до множества B. Соответствующая диаграмма Эйлера- Венна:



11 Если U – универсальное множество и A□ U, то разность U\A называется дополнением множества A до множества U и обозначается $\overline{A}$. Краткая запись: $\overline{A}$ = {x| x□U и x□A}.

Пример выполнения:

Исходные данные:

Даны множества *A={a, e, f, j, k}, B={f, i, j, l, y}, C={j, k, l, y}, D={i, j, s, t, u, y, z}*. Найдите множества *X □ □A □C□□□B □C□* и *Y □ □A □ B□□□D \ C□*. Составьте диаграммы Венна.

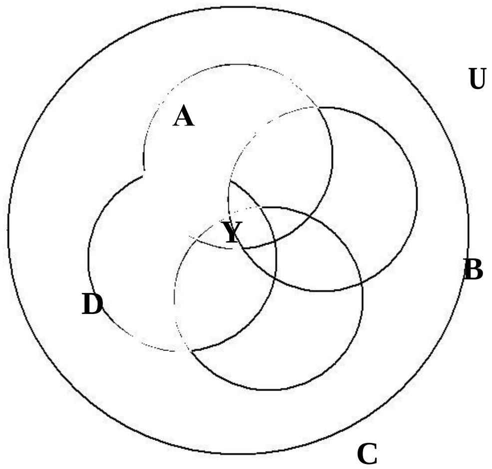
Решение:

1 Определим элементы множества *X □ □A □C□□□B □C□*. Для этого найдем сначала пересечение множеств *□A □C□*. Элементы *j* и *к* одновременно принадлежат множеству A и C , следовательно, *□A □C□ = { j , к }* . Аналогично, *□B □C□ = {j, l, y }* . Таким образом, объединение *□A □C□□□B □C□ = {j, k, l, y}* .

Для построения диаграммы Венна рассмотрим, как связаны между собой множества A, B и C; в примере все три множества пересекаются между собой:
□A □ B□={f; j}; □A □C□={j; k}; □B □C□={j; l; y}; □A □ B □C□={j}

2 Определим элементы множества *Y □ □A □ B□□□D \ C□*. Найдем дополнение B . Универсальное множество по условию за дания состоит их 26 букв *{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y,z}* . Если отсюда исключить 5 элементов множества B, то получим множество $\overline{B}$ из 21 элемента *{a, b, c, d, e, g, h, k, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, z}*. Пересечение множеств *□A □ B □* состоит из элементов *{a, e, к}*, т.е. всех элементов множества A , которые не принадлежат B . Для нахождения разности множеств D \ C вычеркнем нз множества *D={i, j, s, t, u, y, z}* элементы *{j,y}*, принадлежащие *C={j, k, l, y}*. Получим D\C=*{i, s, t, u, z}*. В итоге *Y □ □A □ B□□□D \ C□={a, e, i, k, s, t, u, z}*

Строим диаграмму Венна:
□A □ B□={f; j}; □A □C□={j; k}; □A □ D□={j}; □B □C□={j; l; y}; □B □ D□={i; j; y}; □C □ D□={j; y};
□A □ B □C □ D□={j}



Самостоятельные задания:

1 вариант

1. Пусть А – множество корней уравнения $x^2 = 4$, В – множество корней уравнения $(x + 1)(x - 2) = 0$, С – множество корней уравнения $|x| = 1$. Перечислите элементы множеств:
   а) $A \cup B$; б) $B \cap C$; в) $A \cap C$; г) $C \setminus B$; д) $B \setminus C$; е) $A \cup B \cup C$.

2. Перечислите элементы каждого из множеств:
   а) $A = \{x : x \in \boldsymbol{N}, -2 \le x \le 5\}$;
   б) $B = \{x : x \in \boldsymbol{Z}, |x| < 3\}$;
   в) $C = \{x : x \in \boldsymbol{N}, 2x^2 + 5x - 3 = 0\}$.

3.Даны множества: А=$\{1, 2, 3\}$ и $B = \{1, 8, 5\}$. Найдите $A \times B$.

4.Даны два множества: А – множество стран и В – множество материков. Задайте соответствие между этими множествами с помощью стрелок.
А={Россия, Ливия, Бразилия, Эфиопия, Канада, США},
В={Африка, Евразия, Северная Америка, Южная Америка}.

2 вариант

1. Пусть А – множество корней уравнения $x^2 = 9$, В – множество корней уравнения $(x + 1)(x - 3) = 0$, С – множество корней уравнения $|x| = 1$. Перечислите элементы множеств:
   а) $A \cup B$; б) $B \cap C$; в) $A \cap C$; г) $C \setminus B$; д) $B \setminus C$; е) $A \cup B \cup C$.

2. Перечислите элементы каждого из множеств:
   а) $A = \{x : x \in \boldsymbol{Z}, |x| = 4\}$;
   б) $B = \{x : x \in \boldsymbol{N}, -2 < x \le 5\}$;
   в) $C = \{x : x \in \boldsymbol{Q}, x^2 + 3x + 4 = 0\}$.

3.Даны множества: А=$\{1, 4, 3\}$ и $B = \{-1, 6, 0\}$. Найдите $A \times B$.

4.Даны два множества: А – множество месяцев года и В – множество времён года. Задайте соответствие между этими множествами с помощью стрелок.

3 вариант

1. Пусть А – множество корней уравнения $x^2 = 16$, В – множество корней уравнения $(x + 1)(x - 4) = 0$, С – множество корней уравнения $|x| = 1$. Перечислите элементы множеств:
   а) $A \cup B$; б) $B \cap C$; в) $A \cap C$; г) $C \setminus B$; д) $B \setminus C$; е) $A \cup B \cup C$.

2. Перечислите элементы каждого из множеств:

а) $A = \{x\colon\ x \in \boldsymbol{Z}, -2 \le x \le 3\}$;

б) $B = \{x\colon\ x \in \boldsymbol{N}, (5x + 6)(x - 4) = 0\}$;

в) $C = \{x\colon\ x \in \boldsymbol{N}, |x| = 7\}$.

3.Даны множества: А=$\{0, -4, 3\}$ и $B = \{1, 7, 2\}$. Найдите А$\times$ В.

4.Даны два множества: А – множество стран и В – множество материков. Задайте соответствие между этими множествами с помощью стрелок.

А=$\{$Россия, Ливия, Бразилия, Эфиопия, Канада, США$\}$,

В=$\{$Африка, Евразия, Северная Америка, Южная Америка$\}$.

4 вариант

1. Пусть А – множество корней уравнения $x^2 = 25$, B – множество корней уравнения $(x + 1)(x - 5) = 0$, C – множество корней уравнения $|x| = 1$. Перечислите элементы множеств:

   а) $A \cup B$; б) $B \cap C$; в) $A \cap C$; г) $C \setminus B$; д) $B \setminus C$; е) $A \cup B \cup C$.

2. Перечислите элементы каждого из множеств:

а) $A = \{x\colon\ x \in \boldsymbol{N},\ x \le 4\}$;

б) $B = \{x\colon\ x \in \boldsymbol{Z}, (x + 1)(-x - 3) = 0\}$;

в) $C = \{x\colon\ x \in \boldsymbol{N}, |x| = 5\}$.

3.Даны множества: А=$\{-2, 2, 0\}$ и $B = \{1, -6, 4\}$. Найдите А$\times$ В.

4. Даны два множества: А – множество месяцев года и В – множество времён года. Задайте соответствие между этими множествами с помощью стрелок.

Контрольные вопросы:

1. Назовите элементы, принадлежащие множеству:

а) студентов вашей группы;

б) предметов, изучаемых в I семестре вашей специальности;

в) всех частей света;

г) субъектов федерации, входящих в Российскую Федерацию.

2. Пусть *A* – множество многоугольников. Принадлежат ли этому множеству:

а) восьмиугольник;

б) параллелограмм;

в) отрезок;

г) параллелепипед;

д) круг;

е) полукруг?

3.Запишите перечислением элементов следующие множества:

а) *A* – множество нечетных чисел на отрезке [1; 15];

б) *B* – множество натуральных чисел, меньших 8;

в) *C* – множество натуральных чисел, больших 10, но меньших 12;

г) *D* – множество двузначных чисел, делящихся на 10;

д) *E* – множество натуральных делителей числа 18;

е) *F* – множество чисел, модуль которых равен $\frac{2}{3}$.

4.На факультете филологии и журналистики учатся студенты, получающие стипендию, и студенты, не получающие стипендию. Пусть ***A*** – множество всех студентов факультета; ***B*** – множество студентов факультета, получающих стипендию.

Укажите, что собой представляет ***объединение***, ***пересечение*** и ***разность*** множеств ***A*** и ***B***.

Практическая работа № 16

Тема: Построение диаграммы Эйлера-Венна.

Цель: формирование умения изображать и строить диаграммы Эйлера -Венна

Пояснения к работе:

Основные понятия.

1 Множество - это совокупность, класс отличающихся друг от друга объектов, объединенных каким-либо общим свойством. Объекты, входящие в эту совокупность, называются элементами множества.

2 Существует два основных способа задания неупорядоченных множеств:

а) перечисление всех его элементов;

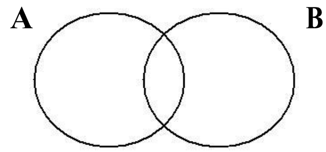
б) описание характеристического (общего) свойства его элементов

3 Если каждый элемент множества А принадлежит множеству В, то А называют подмножеством множества В. Обозначения: А □ В (А принадлежит В, А включено в В, А содержится в В и т.д.), В □ А (В включает А, В содержит А и т.д.).

4 Если А □ В и существует хотя бы один элемент множества В, не принадлежащий множеству А, то А – собственная часть В, т.е. А строго включается в В. Обозначение: А □ В.

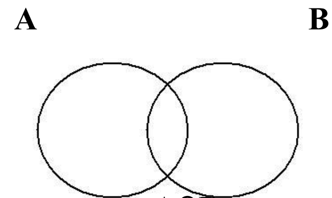
5 Множества А и В называются равными, если А □ В и В □ А. Обозначение: А = В.

6 Объединением (суммой множеств А и В называется множество, обозначаемое через А□В, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат множеству А или В. Краткая запись: А□В = {x | x□ А или x□ В}. Соответствующая диаграмма Эйлера – Венна:



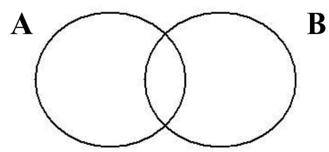
A∪B

7 Пересечением (произведением) множеств А и В называется множество, обозначаемое через А□В и состоящее из тех и только из тех элементов, которые принадлежат множеству А и множеству В. Краткая запись: А□В = {x | x□A и x□B}. Соответствующая диаграмма Эйлера- Венна:



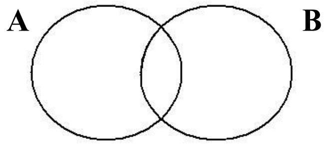
A∩B

8 Разностью множеств А и В называется множество, обозначаемое через А\В и состоящее из тех и только из тех элементов, которые принадлежат А и не принадлежат В. Краткая запись: А\В = {x| x□ А и x□B}. Соответствующая диаграмма Эйлера- Венна:



A\B

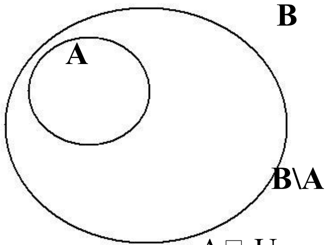
9 <u>Симметрической разностью</u> множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \triangle B$ и состоящее из тех и только из тех элементов, которые принадлежат A\B или B\A.



Краткая запись: $A \triangle B = \{x | x \in A \setminus B$ или $x \in B \setminus A\}$. **A B=A\B∪B\A**

Соответствующая диаграмма Эйлера- Венна:

10 Если множество $A \subset B$, то разность B\A называется дополнением множества A до множества B. Соответствующая диаграмма Эйлера- Венна:



11 Если U – универсальное множество и $A \subset U$, то разность U\A называется дополнением множества A до множества U и обозначается $\overline{A}$. Краткая запись: $\overline{A} = \{x | x \in U$ и $x \notin A\}$.

Пример выполнения:

Исходные данные:

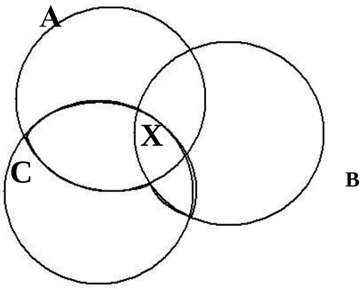
Даны множества *A={a, e, f, j, k}, B={f, i, j, l, y}, C={j, k, l, y}, D={i, j, s, t, u, y, z}*. Найдите множества $X = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ и $Y = (A \cap B) \cup (D \setminus C)$. Составьте диаграммы Венна.

Решение:

1 Определим элементы множества $X = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Для этого найдем сначала пересечение множеств $(A \cap C)$. Элементы *j* и *к* одновременно принадлежат множеству A и C , следовательно, $(A \cap C) = \{ j , к \}$. Аналогично, $(B \cap C) = \{j, l, y \}$. Таким образом, объединение $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{j, k, l, y\}$.

Для построения диаграммы Венна рассмотрим, как связаны между собой множества A, B и C; в примере все три множества пересекаются между собой:

$(A \cap B) = \{f; j\}$; $(A \cap C) = \{j; k\}$; $(B \cap C) = \{j; l; y\}$; $(A \cap B \cap C) = \{j\}$

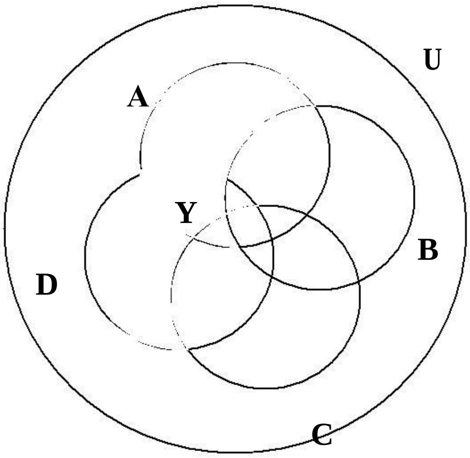


2 Определим элементы множества $Y = (A \cap \overline{B}) \cup (D \setminus C)$. Найдем дополнение $\overline{B}$. Универсальное множество по условию за дания состоит их 26 букв *{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y,z}* . Если отсюда исключить 5 элементов множества B, то получим множество $\overline{B}$ из 21 элемента *{a, b, c, d, e, g, h, k, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, z}*. Пересечение множеств $(A \cap \overline{B})$ состоит из элементов *{a, e, к}*, т.е. всех элементов множества A , которые не принадлежат B . Для нахождения разности множеств D \ C вычеркнем нз множества *D={i, j, s, t, u, ~~y,~~ z}* элементы *{j,y}*, принадлежащие *C={j, k, l, y}*. Получим D\C*={i, s, t, u, z}*. В итоге $Y = (A \cap \overline{B}) \cup (D \setminus C)$*={a, e, i, k, s, t, u, z}*

Строим диаграмму Венна:

$(A \cap B)$*={f; j}*; $(A \cap C)$*={j; k}*; $(A \cap D)$*={j}*; $(B \cap C)$*={j; l; y}*; $(B \cap D)$*={i; j; y}*; $(C \cap D)$*={j; y}*;

$(A \cap B \cap C \cap D)$*={j}*



Задания к практической работе.

1	A={b, e, f, k, t}; B={f, i, j, p, y}; C={j, k, l, y}; D={i, j, s, t, u, y, z}; $X = (A \cup C) \cap (B \cup C)$; $Y = (A \cap \overline{B}) \cup (D \setminus C)$	8	A={c, m, n, o, q}; B={c, d, m, w}; C={m, n, q}; D={c, m, p}; $X = (A \cap B) \cup C$; $Y = (A \cap \overline{B}) \cup (C \setminus D)$
2	A={a, h, m, o, r}; B={j, k, o, u, y}; C={g, h, j}; D={g, j, q}; $X = (A \cup C) \cap (D \cap B)$; $Y = (A \cap \overline{B}) \cup (D \setminus C)$	9	A={b, d, l, p}; B={b, d, e, l, p, x} C={k, l, p, t}; D={d, k, o, p, q, u, v}; $X = (A \setminus B) \cup (C \cap D)$; $Y = (A \cap \overline{B}) \cup (C \setminus D)$

3	A={c, e, h, n}; B={e, f, k, n, x}; C={b, c, h, p, r, s}; D={b, e, g}; X □ □A \ B□□□C □ D□; Y □ □A □ $\overline{B}$ □□□C \ D□	10	A={a, b, f, g, i}; B={c, f, g, i, s, v}; C={a, g, h, i}; D={f, w, x}; X □ □A □ B□□C; Y □ □A □ $\overline{B}$ □□□C \ D□
4	A={b, f, g, m, o}; B={b, g, h, l, u}; C={e, f, m}; D={e, g, l, p, q, u, v}; X □ □A □C□□ B; Y □ □A □ $\overline{B}$ □□□C \ D□	11	A={b, c, h, I, j}; B={e, h, I, s, w}; C={a, b, j, k, l, m}; D={a, h, I, w, x}; X □ □A \ C□□ $\overline{B}$; Y □ □A □ $\overline{B}$ □□□C \ D□
5	A={a, e, f, i}; B={a, b, k, n}; C={e, f, n, o, w, x}; D={a,d,e,o,p,t,u}; X □ □A □ B□□ D; Y □ □$\overline{A}$ □ $\overline{B}$□\ □C □ D□	12	A={a, b, h, j, l}; B={b, c, h, l, r, v}; C={j, k, n, t, z}; D={b, i, k, v, w}; X □ □A □ B□□C; Y □ □$\overline{A}$ □ $\overline{B}$□\ □C □ D□
6	A={a, h, k}; B={c, d, h, p, r}; C={h, i, s}; D={c, g, j, v, w}; X □ □A □ B□□C; Y □ □$\overline{A}$ □ $\overline{B}$□\ □C □ D□	13	A={a, d, k, l, o, s}; B={d, e, k, s, u, x}; C={o, p, w}; D={d, n, r, y, z}; X □ □A \ B□□□C □ D□; Y □ □$\overline{A}$ □ $\overline{B}$□\ □C □ D□
7	A={a, b, g, k, m, p}; B={b, e, f, l, r}; C={k, l, w, x}; D={e, j, o, p, q, u, v}; X □ □A \ B□□□C □ D□; Y □ □$\overline{A}$ □ $\overline{B}$ □\ □C □ D□	14	A={a, f, I, n, o}; B={f, g, o, p, z}; C={i, j, u, w}; D={f, h, n, t, u, y, z}; X □ □A □ B□□C; Y □ □$\overline{A}$ □ $\overline{B}$□\ □C □ D□
15	A={a, b, h, k, o, r}; B={b, g, h, l, s}; C={k, l, z}; D={g, j, p, q, u, v}; X □ □A □C□□ B;	23	A={a, e, g, o, p}; B={e, h, i, o, u}; C={g, h, p, s, t, w}; D={f,h,n,s,t,x,y}; X □ □A \ C□□ $\overline{B}$;

	Y □ □A □ B□\ □C □ D□		Y □ □ B□\ □C □ □A D□
16	A={b, k, n, o, q}; B={a, b, k, u}; C={o, p}; D={a, m, n, y, z}; X □ □A □ B□□ D ; Y □ (A □ D□□□C \ B□	24	A={a, b, c, d, e, r}; B={b, c, d, f, n, y}; C={b, c, h, k, l, s}; D={a, b, r, s, w, x}; X □ □A □ D□□C ; □ D□□□C \ Y □ (A B□
17	A={b, e, g, h, k, s}; B={c, g, p, q}; C={f, g, s, x, y, z}; D={a, c, d, ,g, u, v, z}; X □ □A □ B□□C ; Y □ □A □ D□□□C \ B□	25	A={a, b, c, e, t}; B={b, c, d, e, m, u}; C={b, c, f, g, h, u}; D={a, d, q, r, v, w}; X □ □A \ B□□□C □ D□; Y □ □ D□□□C \ (A B□
18	A={b, d, f, g, l, u}; B={d, e, f, m, n, z}; C={h, i, r, x, y}; D={a, e, f, k, r, s, x}; X □ □A \ B□□□C □ D□; Y □ □A □ D□□□C \ B□	26	A={b, d, j, n, t, v}; B={f, g, j, r, t, x}; C={o, p, x}; D={a, f, m, s, x, y}; X □ □A □ B□□C ; Y □ □A □ D□□□C \ B□

Практическая работа № 17

Тема: Решение задач на применение основных понятий теории графов.

Цель: формирование умения построения графов и решение задач с применением теории графов.

Пояснения к работе:

Теория графов – дисциплина математическая, созданная усилиями математиков, поэтому ее изложение включает в себя и необходимые строгие определения. Итак, приступим к организованному введению основных понятий этой теории.

1. **Определение 1.** Графом называется совокупность конечного числа точек, называемых вершинами графа, и попарно соединяющих некоторые из этих вершин линий, называемых ребрами или дугами графа.

Это определение можно сформулировать иначе: графом называется непустое множество точек (вершин) и отрезков (ребер), оба конца которых принадлежат заданному множеству точек

В дальнейшем вершины графа мы будем обозначать латинскими буквами A, B, C, D. Иногда граф в целом будем обозначать одной заглавной буквой.

Определение 2. Вершины графа, которые не принадлежат ни одному ребру, называются изолированными.

Определение 3. Граф, состоящий только из изолированных вершин, называется нуль-графом**.**

Обозначение: O' – граф с вершинами, не имеющий ребер

Определение 4. Граф, в котором каждая пара вершин соединена ребром, называется полным.

Обозначение: U' – граф, состоящий из n вершин и ребер, соединяющих всевозможные пары этих вершин. Такой граф можно представить как n–угольник, в котором проведены все диагонали

Определение 5. Степенью вершины называется число ребер, которым принадлежит вершина.

Определение 6. Граф, степени всех k вершин которого одинаковы, называется однородным графом степени k**.**

Определение 7. Дополнением данного графа называется граф, состоящий из всех ребер и их концов, которые необходимо добавить к исходному графу, чтобы получить полный граф.

Определение 8. Граф, который можно представить на плоскости в таком виде, когда его ребра пересекаются только в вершинах, называется плоским.

Определение 9. Многоугольник плоского графа, не содержащий внутри себя никаких вершин или ребер графа, называют его гранью.

Понятия плоского графа и грани графа применяется при решении задач на "правильное" раскрашивание различных карт.

Определение 10. Путем от A до X называется последовательность ребер, ведущая от A к X, такая, что каждые два соседних ребра имеют общую вершину, и никакое ребро не встречается более одного раза.

Определение 11. Циклом называется путь, в котором совпадают начальная и конечная точка.

Определение 12. Простым циклом называется цикл, не проходящий ни через одну из вершин графа более одного раза.

Определение 13. Длиной пути**,** проложенного на цикле**,** называется число ребер этого пути.

Определение 14. Две вершины A и B в графе называются связными (несвязными), если в нем существует (не существует) путь, ведущий из A в B.

Определение 15. Граф называется связным, если каждые две его вершины связны; если же в графе найдется хотя бы одна пара несвязных вершин, то граф называется несвязным.

Определение 16. Деревом называется связный граф, не содержащий циклов.

Трехмерной моделью графа-дерева служит, например, настоящее дерево с его замысловато разветвленной кроной; река и ее притоки также образуют дерево, но уже плоское – на поверхности земли.

Определение 17. Несвязный граф, состоящий исключительно из деревьев, называется лесом.

Определение 18. Дерево, все n вершин которого имеют номера от 1 до n, называют деревом с перенумерованными вершинами.

Итак, мы рассмотрели основные определения теории графов, без которых было бы невозможно доказательство теорем, а, следовательно и решение задач.

Задачи решаемые при помощи графов

Знаменитые задачи

Задача коммивояжера

Задача коммивояжера является одной из знаменитых задач теории комбинаторики. Она была поставлена в 1934 году, и об неё обламывали зубы лучшие математики.

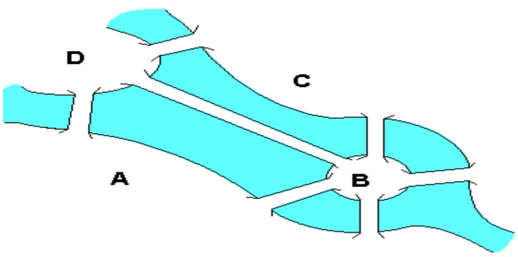
Постановка задачи следующая. Коммивояжер (бродячий торговец) должен выйти из первого города, посетить по разу в неизвестном порядке города 2,1,3..n и вернуться в первый город. Расстояния между городами известны. В каком порядке следует обходить города, чтобы замкнутый путь (тур) коммивояжера был кратчайшим?

Метод решения задачи коммивояжера

Жадный алгоритм “иди в ближайший (в который еще не входил) город”. “Жадным” этот алгоритм назван потому, что на последних шагах приходится жестоко расплачиваться за жадность. Рассмотрим для примера сеть на рисунке **[приложение рис.3]**, представляющую узкий ромб. Пусть коммивояжер стартует из города 1. Алгоритм “иди в ближайший город” выведет его в город 2, затем 3, затем 4; на последнем шаге придется платить за жадность, возвращаясь по длинной диагонали ромба. В результате получится не кратчайший, а длиннейший тур.

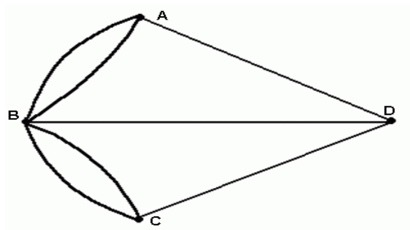
Задача о Кенигсбергских мостах.

Задача формулируется следующим образом. Город Кенигсберг расположен на берегах реки Прегель и двух островах. Различные части города были соединены семью мостами. По воскресеньям горожане совершали прогулки по городу. Вопрос: можно ли совершить прогулку таким образом, чтобы, выйдя из дома, вернуться обратно, пройдя в точности один раз по каждому мосту.



Мосты через реку Прегель расположены как на рисунке **.**

Рассмотрим граф, соответствующий схеме мостов .



Чтобы ответить на вопрос задачи, достаточно выяснить, является ли граф эйлеровым. (Хотя бы из одной вершины должно выходить четное число мостов). Нельзя, прогуливаясь по городу, пройти по одному разу все мосты и вернуться обратно.

Несколько интересных задач

1. "Маршруты".

Задача 1

Как вы помните, охотник за мертвыми душами Чичиков побывал у известных помещиков по одному разу у каждого. Он посещал их в следующем порядке: Манилова, Коробочку, Ноздрева, Собакевича, Плюшкина, Тентетникова, генерала Бетрищева, Петуха, Констанжолго, полковника Кошкарева. Найдена схема, на которой Чичиков набросал взаимное расположение имений и проселочных дорог, соединяющих их. Установите, какое имение кому принадлежит, если ни одной из дорог Чичиков не проезжал более одного раза **[приложение рис.4].**

Задача 2

На рисунке изображена схема местности **[приложение рис.6].**

Передвигаться можно только в направлении стрелок. В каждом пункте можно бывать не более одного раза. Сколькими способами можно попасть из пункта 1 в пункт 9? Какой маршрут самый короткий и какой — самый длинный.

2 "Группы, знакомства"

Задача 1

Участники музыкального фестиваля, познакомившись, обменялись конвертами с адресами. Докажите, что:

а) всего было передано четное число конвертов;

б) число участников, обменявшихся конвертами нечетное число раз, четно.

Решение: Пусть участники фестиваля A_1, A_2, A_3 . . . , A_n – вершины графа, а ребра соединяют пары вершин, изображающих ребят, обменявшихся конвертами **[Приложение рис.8]**

Задача 2

Однажды Андрей, Борис, Володя, Даша и Галя договорились вечером пойти в кино. Выбор кинотеатра и сеанса они решили согласовать по телефону. Было также решено, что если с кем-то созвониться не удастся, то поход в кино отменяется. Вечером у кинотеатра собрались не все, и поэтому посещение кино сорвалось. На следующий день стали выяснять, кто кому звонил. Оказалось, что Андрей звонил Борису и Володе, Володя звонил Борису и Даше, Борис звонил Андрею и Даше, Даша звонила Андрею и Володе, а Галя звонила Андрею, Володе и Борису. Кто не сумел созвониться и поэтому не пришёл на встречу?

Список литературы

1. *Берж К.* Теория графов и ее применения. -М.: ИИЛ, 1962.
2. *Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж.* Введение в конечную математику. -М.: ИИЛ, 1963.

3. *Оре О.* Графы и их применение. -М.: Мир, 1965.
4. *Харари Ф.* Теория графов. -М.: Мир, 1973.
5. *Зыков А.А.* Теория конечных графов. -Новосибирск: Наука, 1969.
6. *Березина Л.Ю.* Графы и их применение. -М.: Просвещение, 1979. -144 с.
7. "Соросовский образовательный журнал" №11 1996 (ст. "Плоские графы");
8. Гарднер М. "Математические досуги", М. "Мир", 1972(глава 35);Олехник С. Н., Нестеренко Ю. В., Потапов М. К. "Старинные занимательные задачи", М. "Наука", 1988(часть 2, раздел 8; приложение 4);

Практическая работа № 18

Тема: Решение задач на классическое определение вероятности.
Цель: формирование умения решать задачи на классическое определение вероятности.
Пояснения к работе:

Задача на классическое определение вероятности с вероятностью, стремящейся к единице, будет присутствовать в вашей самостоятельной/контрольной работе по терверу, поэтому настраиваемся на серьёзную работу. Вы спросите, чего тут серьёзного? …всего-то одна примитивная формула $p = \frac{m}{n}$. Предостерегаю от легкомыслия – тематические задания достаточно разнообразны, и многие из них запросто могут поставить в тупик. В этой связи помимо проработки основного урока, постарайтесь изучить дополнительные задачи по теме, которые находятся в копилке **готовых решений по высшей математике**. Приёмы решения приёмами решения, а «друзей» всё-таки «надо знать в лицо», ибо даже богатая фантазия ограничена и типовых задач тоже хватает. Ну а я постараюсь в хорошем качестве разобрать максимальное их количество.

Вспоминаем классику жанра:

Вероятность наступления события A в некотором испытании равна отношению $P(A) = \frac{m}{n}$, где:

n – общее число всех равновозможных, элементарных исходов данного испытания, которые образуют полную группу событий;

m – количество элементарных исходов, благоприятствующих событию A.

И сразу незамедлительный пит-стоп. Понятны ли вам подчёркнутые термины? Имеется ввиду чёткое, а не интуитивное понимание. Если нет, то всё-таки лучше вернуться к 1-й статье по **теории вероятностей** и только после этого ехать дальше.

Пожалуйста, не пропускайте первые примеры – в них я повторю один принципиально важный момент, а также расскажу, как правильно оформлять решение и какими способами это можно сделать:

Задача 1

В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 1 шар, найти вероятность того, что он будет: а) белым, б) красным, в) чёрным.

Решение: важнейшей предпосылкой для использования классического определения вероятности является **возможность подсчёта общего количества исходов**.

Всего в урне: 15 + 5 + 10 = 30 шаров, и, очевидно, справедливы следующие факты:

– извлечение любого шара одинаково возможно (***равновозможность*** *исходов)*, при этом исходы ***элементарны*** и образуют ***полную группу событий*** *(т.е. в результате испытания обязательно будет извлечён какой-то один из 30-ти шаров)*.

Таким образом, общее число исходов: $n = 30$

Рассмотрим событие: A – из урны будет извлечён белый шар. Данному событию благоприятствуют $m = 15$ элементарных исходов, поэтому по классическому определению:

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ – вероятность того, то из урны будет извлечён белый шар.

Как ни странно, даже в такой простой задаче можно допустить серьёзную неточность, на которой я уже заострял внимание в первой статье по **теории вероятностей**. Где здесь подводный камень? Здесь некорректно рассуждать, что *«раз половина шаров белые, то вероятность извлечения белого шара* $P(A) = \frac{1}{2}$*».* В классическом определении вероятности речь идёт об **ЭЛЕМЕНТАРНЫХ** исходах, и дробь $\frac{15}{30}$ следует обязательно прописать!

С другими пунктами аналогично, рассмотрим следующие события:

B – из урны будет извлечён красный шар;
C – из урны будет извлечён чёрный шар.

Событию B благоприятствует 5 элементарных исходов, а событию C – 10 элементарных исходов. Таким образом, соответствующие вероятности:

$P(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$;

$P(C) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

Типичная проверка многих задач по терверу осуществляется с помощью **теоремы о сумме вероятностей событий, образующих полную группу**. В нашем случае события A, B, C образуют полную группу, а значит, сумма соответствующих вероятностей должна обязательно равняться единице: $P(A) + P(B) + P(C) = 1$.

Проверим, так ли это: $P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{6}{6} = 1$, в чём и хотелось убедиться.

Ответ: а) $\frac{1}{2}$, б) $\frac{1}{6}$, в) $\frac{1}{3}$

В принципе, ответ можно записать и подробнее, но лично я привык ставить туда только числа – по той причине, что когда начинаешь «штамповать» задачи сотнями и тысячами, то стремишься максимально сократить запись решения. К слову, о краткости: на практике распространён «скоростной» вариант оформления **решения**:

Всего: 15 + 5 + 10 = 30 шаров в урне. По классическому определению: $p_Б = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ – вероятность того, то из урны будет извлечён белый шар;

$p_К = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ – вероятность того, то из урны будет извлечён красный шар; $p_Ч = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ – вероятность того, то из урны будет извлечён чёрный шар.

Ответ: а) $\frac{1}{2}$, б) $\frac{1}{6}$, в) $\frac{1}{3}$

Однако если в условии несколько пунктов, то решение зачастую удобнее оформить первым способом, который отнимает чуть больше времени, но зато всё «раскладывает по полочкам» и позволяет легче сориентироваться в задаче.

Разминаемся:

Задача 2

В магазин поступило 30 холодильников, пять из которых имеют заводской дефект. Случайным образом выбирают один холодильник. Какова вероятность того, что он будет без дефекта?

Выберите целесообразный вариант оформления и сверьтесь с образцом внизу страницы.

В простейших примерах количество общих и количество благоприятствующих исходов лежат на поверхности, но в большинстве случаев картошку приходится выкапывать самостоятельно. Каноничная серия задач о забывчивом абоненте:

Задача 3

Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры, но помнит, что одна из них – ноль, а другая – нечётная. Найти вероятность того, что он наберёт правильный номер.

***Примечание**: ноль – это чётное число (делится на 2 без остатка)*

Решение: сначала найдём общее количество исходов. По условию, абонент помнит, что одна из цифр – ноль, а другая цифра – нечётная. Здесь рациональнее не мудрить с комбинаторикой и воспользоваться ***методом прямого перечисления исходов***. То есть, при оформлении решения просто записываем все комбинации:
01, 03, 05, 07, 09
10, 30, 50, 70, 90

И подсчитываем их – всего: 10 исходов.

Благоприятствующий исход один: верный номер.

По классическому определению:
$p = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0{,}1$ – вероятность того, что абонент наберёт правильный номер

Ответ: 0,1

Десятичные дроби в теории вероятностей смотрятся вполне уместно, но можно придерживаться и традиционного вышматовского стиля, оперируя только обыкновенными дробями.

Продвинутая задача для самостоятельного решения:

Задача 4

Абонент забыл пин-код к своей сим-карте, однако помнит, что он содержит три «пятёрки», а одна из цифр – то ли «семёрка», то ли «восьмёрка». Какова вероятность успешной авторизации с первой попытки?

Здесь ещё можно развить мысль о вероятности того, что абонента ждёт кара в виде пук-кода, но, к сожалению, рассуждения уже выйдут за рамки данного урока

Решение и ответ внизу.

Иногда перечисление комбинаций оказывается весьма кропотливым занятием. В частности, так обстоят дела в следующей, не менее популярной группе задач, где подкидываются 2 игральных кубика *(реже – бОльшее количество)*:

Задача 5

Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей в сумме выпадет:

а) пять очков;
б) не более четырёх очков;
в) от 3-х до 9 очков включительно.

Решение: найдём общее количество исходов:

$C_6^1 = 6$ способами может выпасть грань 1-го кубика **и** $C_6^1 = 6$ способами может выпасть грань 2-го кубика; по **правилу умножения комбинаций**, всего: $C_6^1 \cdot C_6^1 = 6 \cdot 6 = 36$ возможных комбинаций. Иными словами, **каждая** грань 1-го кубика может составить упорядоченную пару **с каждой** гранью 2-го кубика. Условимся записывать такую пару в виде (a, b), где a – цифра, выпавшая на 1-м кубике, b – цифра, выпавшая на 2-м кубике. Например:

$(3, 5)$ – на первом кубике выпало 3 очка, на втором – 5 очков, сумма очков: 3 + 5 = 8;
$(6, 1)$ – на первом кубике выпало 6 очков, на втором – 1 очко, сумма очков: 6 + 1 = 7;
$(2, 2)$ – на обеих костях выпало 2 очка, сумма: 2 + 2 = 4.

Очевидно, что наименьшую сумму даёт пара $(1, 1)$, а наибольшую – две «шестёрки».

а) Рассмотрим событие: A – при бросании двух игральных костей выпадет 5 очков. Запишем и подсчитаем количество исходов, которые благоприятствуют данному событию:
$(1, 4); (4, 1); (2, 3); (3, 2)$

Итого: 4 благоприятствующих исхода. По классическому определению: $P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$ – искомая вероятность.

б) Рассмотрим событие: B – выпадет не более 4-х очков. То есть, либо 2, либо 3, либо 4 очка. Снова перечисляем и подсчитываем благоприятствующие комбинации, слева я буду записывать суммарное количество очков, а после двоеточия – подходящие пары:

$2\,\textit{очка}:\quad (1,1)$

$3\,\textit{очка}:\quad (1,2);\,(2,1)$

$4\,\textit{очка}:\quad (1,3);\,(3,1);\,(2,2)$

Итого: 6 благоприятствующих комбинаций. Таким образом: $P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ – вероятность того, что выпадет не более 4-х очков.

в) Рассмотрим событие: C – выпадет от 3-х до 9 очков включительно. Здесь можно пойти прямой дорогой, но… что-то не хочется. Да, некоторые пары уже перечислены в предыдущих пунктах, но работы все равно предстоит многовато.

Как лучше поступить? В подобных случаях рациональным оказывается окольный путь. Рассмотрим **противоположное событие**: $\overline{C}$ – выпадет 2 или 10 или 11 или 12 очков.

В чём смысл? Противоположному событию благоприятствует значительно меньшее количество пар:

$2\,\textit{очка}:\quad (1,1)$

$10\,\textit{очков}:\quad (4,6);\,(6,4);\,(5,5)$

$11\,\textit{очков}:\quad (5,6);\,(6,5)$

$12\,\textit{очков}:\quad (6,6)$

Итого: 7 благоприятствующих исходов.

По классическому определению: $P(\overline{C})=\frac{7}{36}$ – вероятность того, что выпадет меньше трёх или больше 9-ти очков.

Далее пользуемся тем, что **сумма вероятностей противоположных событий** равна единице:

$P(C)+P(\overline{C})=1 \quad\Rightarrow\quad P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{7}{36}=\frac{29}{36}$ – вероятность того, что выпадет от 3-х до 9 очков включительно.

Особо щепетильные люди могут перечислить все 29 пар, выполнив тем самым проверку.

Ответ: а) $\frac{1}{9}$, б) $\frac{1}{6}$, в) $\frac{29}{36}$

В следующей задаче повторим таблицу умножения:

Задача 6

Найти вероятность того, что при броске двух игральных костей произведение очков:

а) будет равно семи;
б) окажется не менее 20-ти;
в) будет чётным.

Краткое решение и ответ в конце урока.

Рассмотренная задача встречается и в других вариациях, несколько дополнительных примеров по сабжу можно найти в соответствующем сборнике на странице **Готовые решения по высшей математике**.

Помимо прямого перечисления и подсчёта исходов, в ходу также различные **комбинаторные формулы**. И снова эпичная задача про лифт:

Задача 7

В лифт 20-этажного дома на первом этаже зашли 3 человека. И поехали. Найти вероятность того, что:

а) они выйдут на разных этажах
б) двое выйдут на одном этаже;
в) все выйдут на одном этаже.

Следует отметить, что **случайность** здесь имеет место быть лишь с точки зрения стороннего наблюдателя *(т.к. человек обычно едет на вполне определённый этаж)*.

Решение: вычислим общее количество исходов: $C_{19}^1 = 19$ способами может выйти из лифта 1-й пассажир **и** $C_{19}^1 = 19$ способами – 2-й пассажир **и** $C_{19}^1 = 19$ способами – третий пассажир. По правилу умножения комбинаций: $C_{19}^1 \cdot C_{19}^1 \cdot C_{19}^1 = 19 \cdot 19 \cdot 19 = 6859$ возможных исходов. То есть, **каждый** этаж выхода 1-го человека может комбинироваться **с каждым** этажом выхода 2-го человека и **с каждым** этажом выхода 3-го человека.

Второй способ основан на **размещениях с повторениями**: $\bar{A}_{19(повт)}^3 = 19^3$ – кому как понятнее.

а) Рассмотрим событие: A – пассажиры выйдут на разных этажах. Вычислим количество благоприятствующих исходов: $A_{19}^3 = 17 \cdot 18 \cdot 19 = 5814$ способами могут выйти 3 пассажира на разных этажах. Рассуждения по формуле $C_{19}^3 \cdot P_3$ проведите самостоятельно.

По классическому определению: $P(A) = \frac{5814}{6859} = \frac{306}{361}$

Теперь подумаем вот над какой вещью: пункт «бэ» достаточно сложен *(см. Задачу 11* ***урока по комбинаторике)***, и значительная часть студентов, которые не в теме, просто не справится с этим пунктом. Но только не те, которые прочитают пару следующих абзацев!

в) Рассмотрим событие: B – пассажиры выйдут на одном этаже. Данному событию благоприятствуют $C_{19}^{1}=19$ исходов и по классическому определению, соответствующая вероятность: $P(B)=\frac{19}{6859}=\frac{1}{361}$.

Заходим с чёрного хода:

б) Рассмотрим событие: C – два человека выйдут на одном этаже *(и, соответственно, третий – на другом)*.

События A, B, C образуют **полную группу** *(считаем, что в лифте никто не уснёт и лифт не застрянет =))*, а значит, $P(A)+P(B)+P(C)=1$.

В результате, искомая вероятность: $P(C)=1-P(A)-P(B)=1-\frac{306}{361}-\frac{1}{361}=\frac{54}{361}$

Таким образом, **теорема о сложении вероятностей событий, образующих полную группу**, может быть не только удобной, но и стать самой настоящей палочкой-выручалочкой!

Ответ: а) $\frac{306}{361}\approx 0{,}8476$, б) $\frac{54}{361}\approx 0{,}1496$, в) $\frac{1}{361}\approx 0{,}0028$

Когда получаются большие дроби, то хорошим тоном будет указать их приближенные десятичные значения. Обычно округляют до 2-3-4-х знаков после запятой.

Поскольку события пунктов «а», «бэ», «вэ» образуют полную группу, то есть смысл выполнить контрольную проверку, причём, лучше с приближенными значениями:

$0{,}8476+0{,}1496+0{,}0028=1$, что и требовалось проверить

Иногда по причине погрешности округлений может получиться 0,9999 либо 1,0001, в этом случае одно из приближенных значений следуют «подогнать» так, чтобы в сумме нарисовалась «чистая» единица.

Практическая работа № 19

Тема: Решение задач на теоремы сложения и умножения вероятностей.

Цель: Формирование умения решать задачи на теоремы сложения и умножения вероятностей.

Пояснения к работе:

Задача на классическое определение вероятности с вероятностью, стремящейся к единице, будет присутствовать в вашей самостоятельной/контрольной работе по терверу, поэтому настраиваемся на серьёзную работу. Вы спросите, чего тут серьёзного? …всего-то одна примитивная формула $p=\frac{m}{n}$. Предостерегаю от легкомыслия – тематические задания достаточно разнообразны, и многие из них запросто могут поставить в тупик. В этой связи помимо проработки основного урока, постарайтесь изучить дополнительные задачи по теме, которые находятся в копилке **готовых решений по высшей математике**. Приёмы решения приёмами решения, а «друзей» всё-таки «надо знать в лицо», ибо даже богатая фантазия ограничена и типовых задач тоже хватает. Ну а я постараюсь в хорошем качестве разобрать максимальное их количество.

Вспоминаем классику жанра:

Вероятность наступления события A в некотором испытании равна отношению $P(A)=\frac{m}{n}$, где:

n – общее число всех равновозможных, элементарных исходов данного испытания, которые образуют полную группу событий;

m – количество элементарных исходов, благоприятствующих событию A.

И сразу незамедлительный пит-стоп. Понятны ли вам подчёркнутые термины? Имеется ввиду чёткое, а не интуитивное понимание. Если нет, то всё-таки лучше вернуться к 1-й статье по **теории вероятностей** и только после этого ехать дальше.

Пожалуйста, не пропускайте первые примеры – в них я повторю один принципиально важный момент, а также расскажу, как правильно оформлять решение и какими способами это можно сделать:

Задача 1

В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 1 шар, найти вероятность того, что он будет: а) белым, б) красным, в) чёрным.

Решение: важнейшей предпосылкой для использования классического определения вероятности является **возможность подсчёта общего количества исходов**.

Всего в урне: 15 + 5 + 10 = 30 шаров, и, очевидно, справедливы следующие факты:

– извлечение любого шара одинаково возможно *(**равновозможность** исходов)*, при этом исходы ***элементарны*** и образуют ***полную группу событий*** *(т.е. в результате испытания обязательно будет извлечён какой-то один из 30-ти шаров)*.

Таким образом, общее число исходов: $n=30$

Рассмотрим событие: A – из урны будет извлечён белый шар. Данному событию благоприятствуют $m=15$ элементарных исходов, поэтому по классическому определению:

$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$ – вероятность того, то из урны будет извлечён белый шар.

Как ни странно, даже в такой простой задаче можно допустить серьёзную неточность, на которой я уже заострял внимание в первой статье по **теории вероятностей**. Где здесь подводный камень? Здесь некорректно рассуждать, что *«раз половина шаров белые, то вероятность извлечения белого шара* $P(A)=\frac{1}{2}$*»*. В классическом определении вероятности речь идёт об **ЭЛЕМЕНТАРНЫХ** исходах, и дробь $\frac{15}{30}$ следует обязательно прописать!

С другими пунктами аналогично, рассмотрим следующие события:

B – из урны будет извлечён красный шар;
C – из урны будет извлечён чёрный шар.

Событию B благоприятствует 5 элементарных исходов, а событию C – 10 элементарных исходов. Таким образом, соответствующие вероятности:

$P(B)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$;

$P(C)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$.

Типичная проверка многих задач по терверу осуществляется с помощью **теоремы о сумме вероятностей событий, образующих полную группу**. В нашем случае события A, B, C образуют полную группу, а значит, сумма соответствующих вероятностей должна обязательно равняться единице: $P(A)+P(B)+P(C)=1$.

Проверим, так ли это: $P(A)+P(B)+P(C)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{6}{6}=1$, в чём и хотелось убедиться.

Ответ: а) $\frac{1}{2}$, б) $\frac{1}{6}$, в) $\frac{1}{3}$

В принципе, ответ можно записать и подробнее, но лично я привык ставить туда только числа – по той причине, что когда начинаешь «штамповать» задачи сотнями и тысячами, то стремишься максимально сократить запись решения. К слову, о краткости: на практике распространён «скоростной» вариант оформления **решения**:

Всего: 15 + 5 + 10 = 30 шаров в урне. По классическому определению:
$p_Б=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$ – вероятность того, то из урны будет извлечён белый шар;

$p_к = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ – вероятность того, то из урны будет извлечён красный шар; $p_ч = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ – вероятность того, то из урны будет извлечён чёрный шар.

Ответ: а) $\frac{1}{2}$, б) $\frac{1}{6}$, в) $\frac{1}{3}$

Однако если в условии несколько пунктов, то решение зачастую удобнее оформить первым способом, который отнимает чуть больше времени, но зато всё «раскладывает по полочкам» и позволяет легче сориентироваться в задаче.

Разминаемся:

Задача 2

В магазин поступило 30 холодильников, пять из которых имеют заводской дефект. Случайным образом выбирают один холодильник. Какова вероятность того, что он будет без дефекта?

Выберите целесообразный вариант оформления и сверьтесь с образцом внизу страницы.

В простейших примерах количество общих и количество благоприятствующих исходов лежат на поверхности, но в большинстве случаев картошку приходится выкапывать самостоятельно. Каноничная серия задач о забывчивом абоненте:

Задача 3

Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры, но помнит, что одна из них – ноль, а другая – нечётная. Найти вероятность того, что он наберёт правильный номер.

Примечание*: ноль – это чётное число (делится на 2 без остатка)*

Решение: сначала найдём общее количество исходов. По условию, абонент помнит, что одна из цифр – ноль, а другая цифра – нечётная. Здесь рациональнее не мудрить с комбинаторикой и воспользоваться ***методом прямого перечисления исходов***. То есть, при оформлении решения просто записываем все комбинации:
01, 03, 05, 07, 09
10, 30, 50, 70, 90

И подсчитываем их – всего: 10 исходов.

Благоприятствующий исход один: верный номер.

По классическому определению:
$p = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0{,}1$ – вероятность того, что абонент наберёт правильный номер

Ответ: 0,1

Десятичные дроби в теории вероятностей смотрятся вполне уместно, но можно придерживаться и традиционного вышматовского стиля, оперируя только обыкновенными дробями.

Продвинутая задача для самостоятельного решения:

Задача 4

Абонент забыл пин-код к своей сим-карте, однако помнит, что он содержит три «пятёрки», а одна из цифр – то ли «семёрка», то ли «восьмёрка». Какова вероятность успешной авторизации с первой попытки?

Здесь ещё можно развить мысль о вероятности того, что абонента ждёт кара в виде пук-кода, но, к сожалению, рассуждения уже выйдут за рамки данного урока

Решение и ответ внизу.

Иногда перечисление комбинаций оказывается весьма кропотливым занятием. В частности, так обстоят дела в следующей, не менее популярной группе задач, где подкидываются 2 игральных кубика *(реже – бОльшее количество)*:

Задача 5

Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей в сумме выпадет:

а) пять очков;
б) не более четырёх очков;
в) от 3-х до 9 очков включительно.

Решение: найдём общее количество исходов:

$C_6^1 = 6$ способами может выпасть грань 1-го кубика **и** $C_6^1 = 6$ способами может выпасть грань 2-го кубика; по **правилу умножения комбинаций**, всего: $C_6^1 \cdot C_6^1 = 6 \cdot 6 = 36$ возможных комбинаций. Иными словами, **каждая** грань 1-го кубика может составить упорядоченную пару **с каждой** гранью 2-го кубика. Условимся записывать такую пару в виде (a, b), где a – цифра, выпавшая на 1-м кубике, b – цифра, выпавшая на 2-м кубике. Например:

$(3, 5)$ – на первом кубике выпало 3 очка, на втором – 5 очков, сумма очков: 3 + 5 = 8;
$(6, 1)$ – на первом кубике выпало 6 очков, на втором – 1 очко, сумма очков: 6 + 1 = 7;
$(2, 2)$ – на обеих костях выпало 2 очка, сумма: 2 + 2 = 4.

Очевидно, что наименьшую сумму даёт пара $(1, 1)$, а наибольшую – две «шестёрки».

а) Рассмотрим событие: A – при бросании двух игральных костей выпадет 5 очков. Запишем и подсчитаем количество исходов, которые благоприятствуют данному событию:
$(1, 4); (4, 1); (2, 3); (3, 2)$

Итого: 4 благоприятствующих исхода. По классическому определению: $P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$ – искомая вероятность.

б) Рассмотрим событие: B – выпадет не более 4-х очков. То есть, либо 2, либо 3, либо 4 очка. Снова перечисляем и подсчитываем благоприятствующие комбинации, слева я буду записывать суммарное количество очков, а после двоеточия – подходящие пары:

$2\,\textit{очка}:\quad (1,1)$

$3\,\textit{очка}:\quad (1,2);\,(2,1)$

$4\,\textit{очка}:\quad (1,3);\,(3,1);\,(2,2)$

Итого: 6 благоприятствующих комбинаций. Таким образом: $P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ – вероятность того, что выпадет не более 4-х очков.

в) Рассмотрим событие: C – выпадет от 3-х до 9 очков включительно. Здесь можно пойти прямой дорогой, но… что-то не хочется. Да, некоторые пары уже перечислены в предыдущих пунктах, но работы все равно предстоит многовато.

Как лучше поступить? В подобных случаях рациональным оказывается окольный путь. Рассмотрим **противоположное событие**: $\overline{C}$ – выпадет 2 или 10 или 11 или 12 очков.

В чём смысл? Противоположному событию благоприятствует значительно меньшее количество пар:

$2\,\textit{очка}:\quad (1,1)$

$10\,\textit{очков}:\quad (4,6);\,(6,4);\,(5,5)$

$11\,\textit{очков}:\quad (5,6);\,(6,5)$

$12\,\textit{очков}:\quad (6,6)$

Итого: 7 благоприятствующих исходов.

По классическому определению: $P(\overline{C})=\frac{7}{36}$ – вероятность того, что выпадет меньше трёх или больше 9-ти очков.

Далее пользуемся тем, что **сумма вероятностей противоположных событий** равна единице:

$P(C)+P(\overline{C})=1 \quad\Rightarrow\quad P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{7}{36}=\frac{29}{36}$ – вероятность того, что выпадет от 3-х до 9 очков включительно.

Особо щепетильные люди могут перечислить все 29 пар, выполнив тем самым проверку.

Ответ: а) $\frac{1}{9}$, б) $\frac{1}{6}$, в) $\frac{29}{36}$

В следующей задаче повторим таблицу умножения:

Задача 6

Найти вероятность того, что при броске двух игральных костей произведение очков:

а) будет равно семи;
б) окажется не менее 20-ти;
в) будет чётным.

Краткое решение и ответ в конце урока.

Рассмотренная задача встречается и в других вариациях, несколько дополнительных примеров по сабжу можно найти в соответствующем сборнике на странице **Готовые решения по высшей математике**.

Помимо прямого перечисления и подсчёта исходов, в ходу также различные **комбинаторные формулы**. И снова эпичная задача про лифт:

Задача 7

В лифт 20-этажного дома на первом этаже зашли 3 человека. И поехали. Найти вероятность того, что:

а) они выйдут на разных этажах
б) двое выйдут на одном этаже;
в) все выйдут на одном этаже.

Следует отметить, что **случайность** здесь имеет место быть лишь с точки зрения стороннего наблюдателя *(т.к. человек обычно едет на вполне определённый этаж)*.

Решение: вычислим общее количество исходов: $C_{19}^{1} = 19$ способами может выйти из лифта 1-й пассажир **и** $C_{19}^{1} = 19$ способами – 2-й пассажир **и** $C_{19}^{1} = 19$ способами – третий пассажир. По правилу умножения комбинаций: $C_{19}^{1} \cdot C_{19}^{1} \cdot C_{19}^{1} = 19 \cdot 19 \cdot 19 = 6859$ возможных исходов. То есть, **каждый** этаж выхода 1-го человека может комбинироваться **с каждым** этажом выхода 2-го человека и **с каждым** этажом выхода 3-го человека.

Второй способ основан на **размещениях с повторениями**: $A_{19(повт)}^{3} = 19^3$ – кому как понятнее.

а) Рассмотрим событие: A – пассажиры выйдут на разных этажах. Вычислим количество благоприятствующих исходов: $A_{19}^{3} = 17 \cdot 18 \cdot 19 = 5814$ способами могут выйти 3 пассажира на разных этажах. Рассуждения по формуле $C_{19}^{3} \cdot P_3$ проведите самостоятельно.

По классическому определению: $P(A) = \frac{5814}{6859} = \frac{306}{361}$

Теперь подумаем вот над какой вещью: пункт «бэ» достаточно сложен *(см. Задачу 11 **урока по комбинаторике**)*, и значительная часть студентов, которые не в теме, просто не справится с этим пунктом. Но только не те, которые прочитают пару следующих абзацев!

в) Рассмотрим событие: B – пассажиры выйдут на одном этаже. Данному событию благоприятствуют $C_{19}^{1} = 19$ исходов и по классическому определению, соответствующая вероятность: $P(B) = \frac{19}{6859} = \frac{1}{361}$.

Заходим с чёрного хода:

б) Рассмотрим событие: C – два человека выйдут на одном этаже *(и, соответственно, третий – на другом)*.

События A, B, C образуют **полную группу** *(считаем, что в лифте никто не уснёт и лифт не застрянет =))*, а значит, $P(A) + P(B) + P(C) = 1$.

В результате, искомая вероятность: $P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - \frac{306}{361} - \frac{1}{361} = \frac{54}{361}$

Таким образом, **теорема о сложении вероятностей событий, образующих полную группу**, может быть не только удобной, но и стать самой настоящей палочкой-выручалочкой!

Ответ: а) $\frac{306}{361} \approx 0{,}8476$, б) $\frac{54}{361} \approx 0{,}1496$, в) $\frac{1}{361} \approx 0{,}0028$

Когда получаются большие дроби, то хорошим тоном будет указать их приближенные десятичные значения. Обычно округляют до 2-3-4-х знаков после запятой.

Поскольку события пунктов «а», «бэ», «вэ» образуют полную группу, то есть смысл выполнить контрольную проверку, причём, лучше с приближенными значениями:

$0{,}8476 + 0{,}1496 + 0{,}0028 = 1$, что и требовалось проверить

Иногда по причине погрешности округлений может получиться 0,9999 либо 1,0001, в этом случае одно из приближенных значений следуют «подогнать» так, чтобы в сумме нарисовалась «чистая» единица.

Практическая работа № 20

Тема: Дисперсия и среднее квадратное отклонение случайной величины.

Цель: закрепление теоретического материала по изучению среднего квадратичного отклонения дисперсии дискретной случайной величины.

Пояснения к работе:

1. Дисперсия имеет размерность равную квадрату размерности случайной величины. Поэтому в тех случаях, когда желательно, чтобы оценка рассеяния имела размерность случайной величины, вычисляют не дисперсию, а среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Среднее квадратическое отклонение равно корню квадратному из дисперсии, поэтому его размерность равна размерности случайной величины. Например, если X выражается в линейных метрах, то $\sigma(X)$ тоже выражается в линейных метрах, а $D(X)$ – в квадратных метрах.

2. Пример:

Найти среднее квадратичное отклонение случайной величины X, заданной следующим законом распределения:

X	*2*	*4*	*6*	*8*
P	*0.2*	*0.15*	*0.35*	*0.3*

Решение.

Найдем математическое ожидание M(X):

M(X)=2*0.2+4*0.15+6*0.35+8*0.3= 5.5

Составим закон распределения случайной величины X^2:

X^2	*4*	*16*	*36*	*64*
P	*0.2*	*0.15*	*0.35*	*0.3*

$M(X^2)=4*0.2+16*0.15+36*0.35+64*0.3=0.8+2.4+12.6+19.2=35$

$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=35-(5.5)^2=35-30.25=4.75$

Найдем среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{4.75} = 2.18$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Дано следующее распределение дискретной случайной величины X

X	1	2	4	5
P	0.31	0.1	0.29	0.3

Найти ее математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение, используя формулы для их определения.

2. Дан ряд распределения дискретной случайной величины X:

x_i	10	20	30	40	50	60
p_i	0,24	0,36	0,20	0,15	0,03	0,02

.

Найти ее математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение.

3. Случайная величина X задана следующим законом распределения:

x_I	1	3	6	8
p_I	0,2	0,1	0,4	0,3

найти *M(x)* – математическое ожидание, *D(x)* – дисперсию, $\sigma(x)$ – среднее квадратическое отклонение случайной величины

4. Найти среднее квадратическое отклонение случайной величины *X* , которая задана следующим рядом распределения:

X	2	3	10
P	0,1	0,4	0,5

Список литературы:

1. «Алгебра и начало анализа» под ред. Яковлева Г.Н. М., 1977г.
2. Башмаков М.М.. «Математика» М., 1987г.
3. Валуцэ И.И. , Дилигул Г.Д. «Математика для техникумов» М., 1989г.
4. Ананасов П.Т., Орлов М.И. «Сборник задач по математике» М., 1987